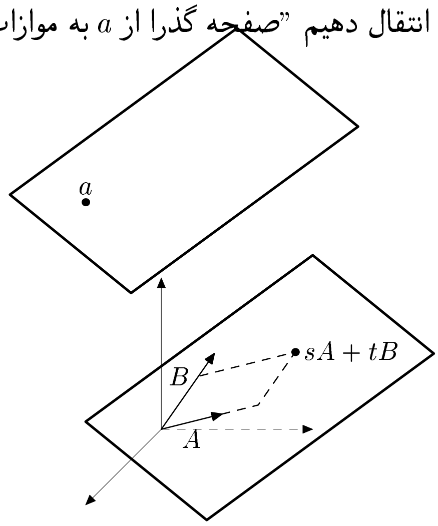
زیرفضاهای مستوی (۱)

در جلسه قبل مفهوم نقطه و خط راست را که ابتدایی‌ترین مفاهیم هندسه‌اند در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفتیم. گام بعدی ما تعریف یک "صفحه راست" (یا به طور خلاصه "صفحه") در $\mathbb{R}^n$ است ($n \geq 2$). یادآوری می‌کنیم که "خط گذرا از a به موازات A"، $A \neq \underline{0}$، این گونه تعریف شد که نخست مضارب حقیقی A را در نظر گرفتیم، که یک "خط گذرا از $\underline{0}$ در راستای A" تشکیل می‌دهند، و سپس با انتقال این خط با مقدار ثابت a، "خط گذرا از a به موازات A" به‌دست آمد. برای تعریف صفحه به طریق مشابه عمل می‌کنیم. فرض کنید A, B دو n تایی ناهمراستا باشند یعنی هیچ‌یک مضرب حقیقی دیگری نباشد. نخست مجموعهٔ نقاط به شکل $sA + tB$ را در نظر می‌گیریم. تصور شهودی ما از این مجموعه، صفحهٔ گذرا از مبدأ و شامل نقاط A و B است. توجه کنید که به‌ازای $s = t = 0$، مبدأ به‌دست می آید، به‌ازای $t = 0$، $s = 1$، نقطهٔ A و به‌ازای $t = 1$، $s = 0$، نقطهٔ B. حال اگر نقطه‌ای a در نظر بگیریم و همه نقاط این مجموعه را به اندازهٔ a انتقال دهیم "صفحه گذرا از a به موازات A و B" حاصل می‌شود.



بدین ترتیب تعریف می‌کنیم

$$\langle a; A, B\rangle = \{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\} \tag{۱}$$

این مجموعه را صفحهٔ گذرا از a به موازات A و B می‌نامیم.

مثال ۱ (صفحات مختصاتی). در $\{۱, \ldots, n\}$ به تعداد $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$ زوج اندیس $\{i, j\}$، $\{i,j\}$، $i \neq j$، وجود دارد. به‌ازای هر $\{i, j\}$ مجموعهٔ

$$\{se_i + te_j \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

یک صفحهٔ مختصاتی در $\mathbb{R}^n$ است.

اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد، $E = \langle a; A, B\rangle$، E° یا انتقال‌یافتهٔ E به مبدأ را به صورت

$$E^\circ = \langle \underline{\circ}; A, B\rangle$$

تعریف می‌کنیم. گاهی به جای $\langle \underline{\circ}; A, B\rangle$ می‌نویسیم $\langle A, B\rangle$. اگر $E_۱$ و $E_۲$ هر یک خط یا صفحه باشد، $E_۱$ و $E_۲$ را موازی می‌نامیم و می‌نویسیم $E_۱ \| E_۲$ مشروط بر این که اشتراک $E_۱$ و $E_۲$ تهی باشد و به علاوه:

$$E_۱ \subset E_۲ \quad \text{یا} \quad E_۲ \subset E_۱$$

مثال ۲. اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد و $\underline{\circ} \notin E$. نشان می‌دهیم $E \| E^\circ$. باید نشان دهیم E و E° نقطهٔ مشترک ندارند. فرض کنید $E = \langle a; A, B\rangle$، پس $E^\circ = \langle \underline{\circ}; A, B\rangle$. اگر نقطهٔ مشترکی وجود داشته باشد، مثلاً P، آنگاه $P = a + s_۱A + t_۱B$ برای $s_۱$ و $t_۱$ مناسب، و نیز $P = s_۲A + t_۲B$ برای $s_۲$ و $t_۲$ مناسب، پس $a + s_۱A + t_۱B = s_۲A + t_۲B$، یا

$$a = (s_۲ - s_۱)A + (t_۲ - t_۱)B \tag{۲}$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \underline{0} &= (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \\ &= a + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \end{aligned}$$

یعنی $\underline{0} \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۳. اگر $E = \langle a; A, B\rangle$ یک صفحه باشد، $b \notin E$، و $L = \langle b; B\rangle$، آنگاه خط L با صفحهٔ E موازی است زیرا که اولاً $L^\circ = \langle \underline{0}; B\rangle \subset \langle \underline{0}; A, B\rangle = E^\circ$ ، و ثانیاً نشان می‌دهیم L و E نقطهٔ مشترک ندارند. فرض کنید P یک نقطهٔ مشترک باشد، پس $P = b + tB$ و نیز $P = a + s_1A + t_1B$، بنابراین

$$b + tB = a + s_1A + t_1B$$

$$b = a + s_1A + (t_1 - t)B$$

یعنی $b \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۴. در $\mathbb{R}^3$، اگر دو صفحه نقطه مشترک نداشته باشند، لزوماً موازی‌اند. این وضعیت در $\mathbb{R}^n$، برای $n \geq 4$، لزوماً حاکم نیست، یعنی دو صفحهٔ فاقد نقطهٔ مشترک ممکن است موازی نباشند! مثال زیر را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید:

$$E_1 = \langle \underline{0}; e_1, e_2\rangle \quad , \quad E_2 = \langle e_4; e_1, e_3\rangle$$

E_1 متشکل از نقاط به شکل $(s, t, 0, 0)$ است و E_2 متشکل از نقاط به صورت $(s', 0, t', 1)$. بدیهی است که E_1 و E_2 نقطهٔ مشترک ندارند زیرا که مؤلفه چهارم هر عنصر E_1 صفر است و مؤلفه چهارم هر عنصر E_2 برابر ۱ می‌باشد. حال اگر E_1 و E_2 را به مبدأ منتقل کنیم، داریم

$$E_1^\circ = E_1 = \{(s, t, 0, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad , \quad E_2^\circ = \{(s', 0, t', 0) \mid s', t' \in \mathbb{R}\}$$

که نه E_1° زیرمجموعهٔ E_2° است و نه بالعکس، پس E_1 و E_2 در تعریف توازی صدق نمی‌کنند. دو صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n \geq 4$، را که نه نقطهٔ مشترک داشته باشند و نه موازی باشند، دو صفحه متنافر می‌نامیم.

در اینجا می‌توان گزاره‌هایی مشابه گزاره‌های (۱–۴) و (۱–۵) جلسهٔ قبل ثابت کرد به این مضمون که:

۱) اگر $E = \langle a; A, B\rangle$، C و D دو عنصر ناهمراستای E° باشند و $b \in E$، آنگاه $E = \langle b; C, D\rangle$.

۲) اگر P, Q, R سه نقطهٔ متمایز و ناهمراستای مشترک بین دو صفحه $E_۱$ و $E_۲$ باشند، آنگاه $E_۱ = E_۲$.

چون به زودی احکام کلی‌تری ثابت خواهیم کرد در حال حاضر اثبات این دو حکم را به دانشجویان واگذار می‌کنیم و به معرفی مفاهیم جدیدی فرای خط و صفحه می‌پردازیم. تصور ذهنی ما از خط و صفحه، اشکال مسطح "یک بعدی" و "دو بعدی" است. هنوز تعریفی دقیق از کلمه "بعد" ارائه نکرده‌ایم و لیکن می‌دانیم که نقاط خط با یک پارامتر t در مجموعه $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ مدرج می‌شوند و نقاط یک صفحه با دو پارامتر s, t در مجموعهٔ $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. به طور شهودی می‌توان تعداد پارامترهای حقیقی مستقل لازم برای تمیز دادن نقاط یک مجموعه را "بعد" آن مجموعه تلقی کرد. این مفهوم را به طور دقیق‌تر ضمن معرفی "زیرفضاهای مستوی kـ بعدی در $\mathbb{R}^n$"، $k \leq n$، که تعمیم خط و صفحه به عنوان "اشیاء مسطح kـ بعدی" خواهند بود، بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید می‌خواهیم در $\mathbb{R}^n$، $n \geq ۳$، تعریفی برای اشیاء سه‌بعدی مسطح مشابه خط و صفحهٔ دوبعدی تعریف کنیم. طبیعی است که نخست مجموع‌های به شکل $rA + sB + tC$، r, s, t اعداد حقیقی را در نظر بگیریم که در آن A، B و C سه n تایی هستند. سپس اگر $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد، مجموعه انتقال یافته، یعنی $\{a + rA + sB + tC | r, s, t \in \mathbb{R}\}$ را "یک زیرفضای سه‌بعدی" در $\mathbb{R}^n$ تلقی کنیم. نکتهٔ قابل توجه این که در مورد خط راست فرض کردیم $A \neq \underline{\circ}$ که در غیر این صورت مجموعهٔ $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ به یک تک نقطهٔ $\{a\}$ مبدل می‌شود. همین‌طور در مورد صفحه، فرض ناهمراستا بودن A و B را اعمال کردیم که در غیر این صورت مجموعهٔ $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ به یک خط راست یا حتی یک نقطه (وقتی $A = B = \underline{\circ}$) مبدل می‌شود. حال می‌خواهیم شرطی مناسب برای سه n تایی (یا حتی به طور کلی k، n تایی) بیابیم که تعمیم طبیعی صفر نبودن A در $\{A\}$ و ناهمراستا بودن A و B در $\{A, B\}$ باشد.

(۲—۱) تعریف. فرض کنید $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k$ عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند. مجموعهٔ $\{\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k\}$ را مستقل خطی می‌نامیم در صورتی که هیچ مجموع مضارب حقیقی $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k$، یعنی $t_1\mathbf{A}_1+\cdots+t_k\mathbf{A}_k$، صفر نشود مگر این که همه ضرایب $t_1,\dots,t_k$ صفر باشند.

اگر مجموعهٔ $\{\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k\}$ مستقل خطی نباشند، آن را وابستهٔ خطی می‌نامیم. هر مجموع به شکل $t_1\mathbf{A}_1+\cdots+t_k\mathbf{A}_k$ یک ترکیب خطی $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k$ خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $k=1$، مجموعه $\{A\}$ وابستهٔ خطی خواهد بود به شرطی که $tA=\underline{0}$ بتواند برقرار باشد بدون این که $t=0$. این تنها وقتی میسر است که $A=\underline{0}$. پس شرط اعمال شده برای تعریف خط راست $\langle a;A\rangle$ روی A (یعنی $A\neq\underline{0}$) معادل این است که $\{A\}$ مستقل خطی است.

مثال ۲. برای $k=2$، وابستگی خطی مجموعهٔ دو عنصری $\{A,B\}$ معادل این است که $t_1A+t_2B=\underline{0}$ بدون این که هردوی t_1 و t_2 صفر شوند. مثلاً اگر $t_1\neq 0$، آنگاه $A=-\frac{t_2}{t_1}B$، یعنی A مضربی حقیقی از B خواهد شد. بدین ترتیب در تعریف صفحه $\langle a;A,B\rangle$ شرط همراستا نبودن A و B را می‌توان بدین صورت بیان کرد که $\{A,B\}$ مستقل خطی است.

مثال ۳. اگر در مجموعهٔ $\{A_1,\dots,A_k\}$، یک یا بیشتر از A_i ها nـ تایی صفر، $\underline{0}$، باشد، مجموعه، وابسته خطی می‌شود. مثلاً فرض کنید $A_j=0$. ضرایب t_i را این طور در نظر بگیرید:

$$t_i=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

در این صورت $t_1A_1+\cdots+t_kA_k=\underline{0}$ بدون این که همهٔ A_i ها صفر باشند.

(۲—۲) گزاره. شرطی لازم و کافی برای وابستگی خطی $\{A_1,\dots,A_k\}$ بدین شرح است:

الف) در حالت $k=1$، $\{A_1\}$ وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر $A_1=\underline{0}$.

ب) در حالت $k>1$، $\{A_1,\dots,A_k\}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر بتوان یکی از A_i ها را به صورت ترکیبی خطی از سایر A_i ها نوشت.

اثبات. حالت $k = ۱$ در مثال ۱ بالا بررسی شد، فرض کنید $k \geq ۲$. اگر $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، $t_۱, \ldots, t_k$ حقیقی وجود دارند، نه همه صفر، که $t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k = \underline{\circ}$. مثلاً $t_j \neq \circ$. در این صورت

$$A_j = -\frac{t_۱}{t_j}A_۱ - \cdots - \frac{t_{j-۱}}{t_j}A_{j-۱} - \frac{t_{j+۱}}{t_j}A_{j+۱} - \cdots - \frac{t_n}{t_j}A_n$$

یعنی A_j ترکیبی خطی از سایر A_i ها است.

بالعکس اگر داشته باشیم:

$$A_j = c_۱A_۱ + \cdots + c_{j-۱}A_{j-۱} + c_{j+۱}A_{j+۱} + \cdots + c_kA_k$$

با انتقال A_j به طرف دیگر رابطه داریم

$$c_۱A_۱ + \cdots + c_{j-۱}A_{j-۱} - A_j + c_{j+۱}A_{j+۱} + \cdots + c_kA_k = \underline{\circ}$$

و این در حالی است که دست کم یکی از ضرایب (ضریب A_j) صفر نیست. □

با این مقدمه، زیرفضاهای با بعد بالاتر از ۱ و ۲ در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد و $a \in \mathbb{R}^n$ یک نقطهٔ داده شده، در این صورت مجموعهٔ زیر یک زیرفضای مستوی kـ بعدی ("زیرفضای مستوی kـ بعدی گذرا از a به موازات $A_۱, \ldots, A_k$") خوانده می‌شود:

$$\langle a; A_۱, \ldots, A_k\rangle = \{a + t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k \mid t_۱, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\} \qquad (۳)$$

اگر مجموعهٔ تعریف شده در (۳) را به E نمایش دهیم، مقصود از E° (انتقال‌یافتهٔ E به $\underline{\circ}$)، مجموعهٔ $\langle \underline{\circ}, A_۱, \ldots, A_k\rangle = \langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$ است. به طور کلی یک زیرفضای مستوی kـ بعدی که شامل $\underline{\circ}$ باشد یک زیرفضای خطی خوانده می‌شود. طبق قرارداد، تنها زیرفضای صفر بعدی تک عنصری $\{\underline{\circ}\}$ است، و بدین ترتیب زیرفضاهای مستوی صفربعدی تک عنصری‌های $\{a\}$ هستند، $a \in \mathbb{R}^n$، که

از انتقال $\underline{\circ}$ به a به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب جدول زیر را داریم:

زیرفضای مستوی صفربعدی $\longleftrightarrow$ نقطه

زیرفضای مستوی یک‌بعدی $\longleftrightarrow$ خ

زیرفضای مستوی دوبعدی $\longleftrightarrow$ صفحه

$$\vdots$$

تعریف زیرفضای kـ بعدی جای تأمل دارد. سؤال‌های متعددی می‌توان این مقطع مطرح کرد. آیا عدد k به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، یعنی اگر $\{A_۱, \dots, A_k\}$ و $\{B_۱, \dots, B_l\}$ دو مجموعه، هر یک مستقل‌خطی، باشند، آیا می‌توان رابطه‌ای به شکل $\langle a; A_۱, \dots, A_k\rangle = \langle b; A_۱, \dots, A_k\rangle$، برای a و b مناسب، برقرار ساخت بدون این که $k = l$؟ به چه اعتباری زیرمجموعه‌های $\langle a; A_۱, \dots, A_k\rangle$ را "مسطح" تجسم می‌کنیم؟ همان طور که دو خط راست دارای دو نقطهٔ متمایز مشترک بر هم منطبق می‌شوند، آیا دو زیرفضای مستوی kـ بعدی با $(k+۱)$ نقطهٔ مشترک، لزوماً بر هم منطبق‌اند؟ در باقیمانده این جلسه و جلسهٔ بعد به جواب‌های قاطعی در مورد این گونه سؤال‌ها خواهیم رسید.

(۲—۳) گزاره. فرض کنید $\{A_۱, \dots, A_k\}$ مستقل خطی ست و $a \in \mathbb{R}^n$، در این صورت نمایش عناصر $\langle a; A_۱, \dots, A_k\rangle$ به شکل $a + t_۱A_۱ + \dots + t_kA_k$ منحصر به فرد است.

اثبات. توجه کنید که هر عنصر $\langle a; A_۱, \dots, A_k\rangle$ طبق تعریف به شکل $a + t_۱A_۱ + \dots + t_kA_k$ برای $t_۱, \dots, t_k$ مناسب است. می‌خواهیم ثابت کنیم $t_۱, \dots, t_k$ به طور یگانه تعیین می‌شوند. فرض کنید:

$$a + t_۱A_۱ + \dots + t_kA_k = a + t'_۱A_۱ + \dots + t'_kA_k$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $\underline{\circ} = (t_۱ - t'_۱)A + \dots + (t_k - t'_k)A_k$. از آنجا که $\{A_۱, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است نتیجه می‌شود که همهٔ ضرایب صفر هستند، پس $t'_i = t_i$ برای $i = ۱, \dots, k$، و یگانگی ضرایب به اثبات می‌رسد. □

گزارهٔ فوق نشان می‌دهد هر زیرفضای مستوی kـ بعدی در تناظر یک به یک با مجموعهٔ kـ تایی‌های مرتب $(t_۱, \dots, t_k)$، یعنی مجموعهٔ $\mathbb{R}^k$، قرار می‌گیرد، همان طور که خط راست با $\mathbb{R}$ و

صفحه با $\mathbb{R}^۲$ مدرج می‌شود.

نکته زیر نیز در مورد مفهوم استقلال خطی مکرراً مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

(۲—۴) گزاره. اگر مجموعهٔ $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن نیز مستقل خطی است. اگر $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، هر مجموعهٔ شامل آن نیز وابستهٔ خطی است.

اثبات. اگر زیرمجموعه‌ای از $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی شود، یک ترکیب خطی از اعضای آن زیرمجموعه برابر صفر می‌شود بدون آن که همهٔ ضرایب صفر باشند. اگر سایر A_i ها را با ضریب صفر به این رابطه بیافزاییم یک رابطهٔ وابستهٔ خطی برای $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ به‌دست می آید. همین طور اگر یک رابطهٔ وابستگی خطی برای $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ موجود باشد، همین رابطه، وابستگی خطی برای هر مجموعهٔ شامل $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ را نشان می‌دهد. $\square$