# پیوستگی و حد (۲)

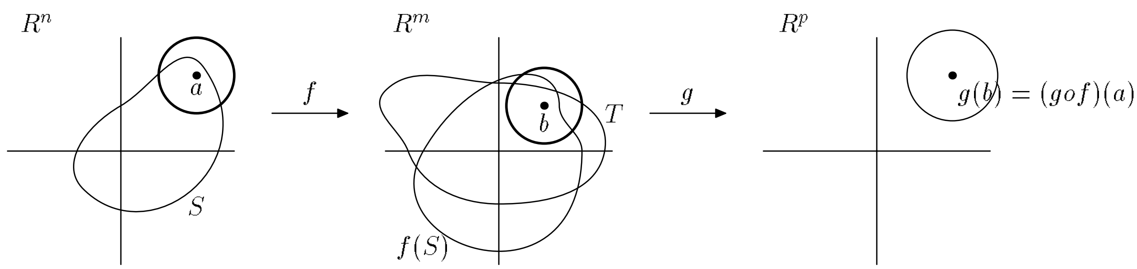
تابع $f:S\longrightarrow\mathbb{R}^m$ را پیوسته می‌نامیم در صورتی که $f$ در همهٔ نقاط دامنه خود، یعنی $S$، پیوسته باشد.مثال عمده‌ای که از تابع‌های پیوسته در جلسهٔ گذشته دیدیم تابع‌های مستوی $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ بودند. در واقع ثابت کردیم هر تابع مستوی $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته است ولی از آنجا که شرط لازم و کافی برای پیوستگی یک تابع به $\mathbb{R}^m$ پیوستگی همهٔ مؤلفه‌های $f$ است و هر مؤلفهٔ تابع مستوی، مستوی است، حکم در مورد تابع‌های مستوی $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ نتیجه می‌شود. با مثال‌هایی که در مورد تابع‌های ضرب و خارج قسمت ثابت کردیم، اکنون می‌توان گردایهٔ بزرگی از تابع‌های پیوسته فراهم آورد. به این منظور نخست حکم کلی و مهم زیر را ثابت می‌کنیم:

**(۱۹—۱) گزاره.** فرض کنید $f:S\longrightarrow\mathbb{R}^m$، $S\subset\mathbb{R}^n$، و $g:T\longrightarrow\mathbb{R}^p$، $T\subset\mathbb{R}^m$، دو تابع باشند، $a\in S$، $b=f(a)\in T$، $f$ در $a$ پیوسته باشد و $g$ در $b$ پیوسته باشد. در این صورت تابع $g\circ f$ در نقطهٔ $a$ پیوسته است.

**اثبات.** نخست دامنهٔ $g\circ f$ را در نظر بگیرید:

$$\text{دامنه}\,(g\circ f)=\{x\in S\mid f(x)\in T\}$$

که زیرمجموعه‌ای از $S$ است. نقطه $a$ در این دامنه است زیرا که فرض کرده‌ایم $b = f(a)$ عضو $T$ است. اثبات گزاره با توجه به گزارهٔ ۱۸−۲ بخش قبل سرراست است. هرگاه گوی باز شعاع $e > ۰$




حول $(g \circ f)(a)$ داده شده باشد، باید $e' > ۰$ پیدا کنیم که هرگاه $x \in S$ و $x$ در گوی باز شعاع $e'$ حول $a$ باشد، آنگاه $(g \circ f)(x)$ در گوی باز شعاع $e$ حول $(g \circ f)(a)$ قرار گیرد. نخست از پیوستگی $g$ در $b$ استفاده می‌کنیم. طبق این فرض گوی شعاع $e'' > ۰$ حول $b = f(a)$ وجود دارد که:

$$(y \in T, |y - b| < e'') \Longrightarrow |g(y) - g(b)| < e \qquad (۱)$$

حال برای گوی شعاع $e'' > ۰$ حول $b$، بنابر پیوستگی $f$ در $a$، گوی $e' > ۰$ حول $a$ وجود دارد که:

$$(x \in S, |x - a| < e') \Longrightarrow |f(x) - b| < e'' \qquad (۲)$$

بنابراین اگر $x$ به علاوه در دامنه $g \circ f$ باشد، اگر $f(x)$ در (۲) را $y$ بنامیم، حکم از (۱) نتیجه می‌شود.□

با این گزاره و مثال‌های بخش قبل اکنون می‌توانیم پیوستگی "تابع‌های گویا" را بررسی کنیم. نخست مقصود از یک تک جمله‌ای $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی به شکل زیر است:

$$f(x_۱, \ldots, x_n) = c x_۱^{\alpha_۱} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (۳)$$

که در اینجا $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n$ اعداد صحیح نامنفی هستند و $c \in \mathbb{R}$. به عنوان یک حالت ساده تابع $f : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت $f(x, y, z) = xyz$ تعریف شده است. نشان می‌دهیم $f$

پیوسته است برای این کار، $f$ را به صورت ترکیب $f = p \circ g$ می‌نویسیم که در آن:

$$g : \mathbb{R}^{۳} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲} \quad , \quad g(x, y, z) = (xy, z)$$

و

$$p : \mathbb{R}^{۲} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad p(u, v) = uv$$

برای اثبات پیوستگی $f$، کافی است بنابر گزاره ۱۹—۱ ملاحظه کنیم که $g$ و $p$ پیوسته‌اند. $p$ تابع حاصل‌ضرب است که در بخش گذشته پیوستگی آن ثابت شد. برای تابع $g$، باید تحقیق کنیم که هر مؤلفه پیوسته است، مؤلفهٔ دوم $h$ تابع افکنش $z \longrightarrow (x, y, z)$ است که پیوسته می‌باشد. مؤلفه اول خود ترکیب افکنش و حاصل‌ضرب است:

$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y) \longrightarrow xy$$

افکنش روی هر تعداد مؤلفه پیوسته است زیرا هر مؤلفه افکنش روی یک محور است. حال برای تک جمله‌ای کلی (۳) نیز با استفادهٔ مکرر از این استدلال، یا استقراء، دیده می‌شود که (۳) یک تابع پیوسته از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ تعریف می‌کند.

مجموع تعداد متناهی تک جمله‌ای، یک چندجمله‌ای می‌شود:

$$f(x_{۱}, \ldots, x_n) = c_{۱} x_{۱}^{\alpha_{۱}} \ldots x_n^{\alpha_n} + \cdots + c_k x_{۱}^{\rho_{۱}} \ldots x_n^{\rho_n} \qquad (۴)$$

$f$ حاصل ترکیب تک‌جمله‌ای‌ها با تکرار عمل جمع است که هر دو نوع تابع پیوسته‌اند، پس $f$ پیوسته است. به عنوان مثال برای دو جمله‌ای $f(x_{۱}, \ldots, x_n) = c_{۱} x_{۱}^{\alpha_{۱}} \ldots x_n^{\alpha_n} + c_{۲} x_{۱}^{\beta_{۱}} \ldots x_n^{\beta_n}$ ، $f$ را به صورت ترکیب زیر می‌نویسیم:

$$(x_{۱}, \ldots, x_n) \xrightarrow{g} (c_{۱} x_{۱}^{\alpha_{۱}} \ldots x_n^{\alpha_n}, c_{۲} x_{۱}^{\beta_{۱}} \ldots x_n^{\beta_n}) \xrightarrow{s} c_{۱} x_{۱}^{\alpha_{۱}} \ldots x_n^{\alpha_n} + c_{۲} x_{۱}^{\beta_{۱}} \ldots x_n^{\beta_n}$$

تابع جمع، $s$، پیوسته است (مثال بخش قبل) و هر یک از دو مؤلفه تابع $g$ تک جمله‌ای، پس پیوسته‌اند، بنابراین $f = s \circ g$ پیوسته می‌باشد. حالت کلی با استقراء یا استفاده مکرر از تابع جمع حاصل می‌شود. بدین ترتیب چندجمله‌ای‌ها تابع‌های پیوسته تعریف می‌کنند.

یک گام فرای چندجمله‌ای‌ها، "تابع‌های گویا" هستند. اگر $g(x)$ و $h(x)$ دو چندجمله‌ای برحسب $x = (x_۱, \dots, x_n)$ باشند، تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌شو یک تابع گویا می‌نامیم:

$$f(x_۱, \dots, x_n) = \frac{g(x_۱, \dots, x_n)}{h(x_۱, \dots, x_n)} \qquad (۵)$$

دامنهٔ $f$ از $(x_۱, \dots, x_n)$ هایی در $\mathbb{R}^n$ تشکیل شده که $h(x_۱, \dots, x_n) \neq ۰$. تابع $f$ را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع $p$ و $q$ به صورت زیر نوشت:

$$f = q \circ p \quad , \quad x \xrightarrow{p} (g(x), h(x)) \xrightarrow{q} \frac{g(x)}{h(x)} \qquad (٦)$$

تابع $p$ پیوسته است زیرا که هر مؤلفه آن یک چندجمله‌ای است، و تابع $q$ نیز، که تابع خارج قسمت است، در بخش قبل نشان داده شده که در نقاطی که مؤلفه دوم صفر نباشد پیوسته است. بنابراین $f$ پیوسته می‌باشد.

اکنون به بررسی مفهوم "حد" می‌پردازیم که قرابت‌هایی با مفهوم پیوستگی دارد. اگر $\rho > ۰$ داده شده باشد، مقصود از گوی باز محذوف به شعاع $\rho$ و مرکز $a$، $a \in \mathbb{R}^n$، مجموعهٔ زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid ۰ < |x - a| < \rho\}$$

به بیان دیگر، با حذف مرکز از گوی باز شعاع $\rho$، گوی محذوف شعاع $\rho$ به مرکز $a$ به‌دست می‌آید. حال زیرمجموعهٔ $S$ از $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ $a \in \mathbb{R}^n$ را یک نقطهٔ حدی $S$ می‌نامیم در صورتی هر گوی محذوف شعاع مثبت به مرکز $a$ حاوی نقطه‌ای از $S$ باشد. توجه کنید که این تعریف شرطی بر

تعلق نقطهٔ $a$ به مجموعهٔ $S$ نمی‌گذارد، $a$ ممکن است نقطه‌ای از $S$ باشد یا نباشد. در واقع می‌توان از تعریف نتیجه گرفت که در هر گوی محذوف به مرکز نقطهٔ حدی، بی‌نهایت نقطه از مجموعهٔ $S$ وجود دارد. زیرا که هرگاه نقطه‌ای $x$ از $S$ در یک گوی محذوف به مرکز $a$ باشد، داریم $|x-a| > ۰$ و حال طبق تعریف باید نقطه‌ای $y$ از $S$ در گوی محذوف شعاع $|x-a|$ حول $a$ باشد، یعنی $|y-a| < |x-a|$، پس $y \neq x$، و به همین ترتیب با کوچک کردن شعاع کرهٔ محذوف همواره نقطهٔ جدیدی از $S$ در گوی محذوف اولیه حول $a$ پیدا می‌شود.

**مثال ۱.** برای مستطیل نیمه باز $a < x < b$، $c \leq y \leq d$ در $\mathbb{R}^۲$، که در آن $a < b$ و $c < d$، مجموعهٔ نقاط حدی این مجموعه عبارت است از مستطیل بستهٔ $a \leq x \leq b$، $c \leq y \leq d$.

**مثال ۲.** برای حلقهٔ $۱ > |x| > ۰$ در $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ۰ < |x| < ۱\}$، مجموعهٔ نقاط حدی برابر است با گوی بستهٔ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq ۱\}$.

اکنون می‌توانیم مفهوم "حد" یک تابع را مطرح کنیم. فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، $a$ یک نقطهٔ حدی $S$، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع، و $L \in \mathbb{R}^m$. می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{۷}$$

و می‌خوانیم حد تابع $f$ وقتی $x$ به $a$ میل کند برابر $L$ است در صورتی که برای هر $e > ۰$، وجود داشته باشد $e' > ۰$ که:

$$(x \in S, ۰ < |x-a| < e') \Longrightarrow |f(x) - L| < e \tag{۸}$$

به بیان دیگر، برای هر گوی با شعاع مثبت $e$ حول $L$، گوی محذوفی به شعاع مثبت $e'$ حول $a$ وجود داشته باشد که اشتراک آن با $S$ به تمامی به داخل گوی شعاع $e$ حول $L$ نگاشته شود.

این تعریف با تعریف پیوستگی $f$ در نقطهٔ $a$ در نکات زیر متمایز است:

الف) نقطهٔ $a$ ممکن است یک نقطهٔ دامنهٔ تعریف $f$ نباشد و بالعکس یک نقطه پیوستگی $f$ ممکن است نقطهٔ حدی نباشد، یعنی حد تابع وقتی $x$ به $a$ میل کند معنی نداشته باشد.

ب) در تعریف حد، حتی اگر $f$ در $a$ تعریف شده باشد، شرطی بر مقدار $f(a)$ قایل نشده‌ایم.

حکم زیر بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود:

**(۱۹—۲) گزاره.** برای تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، اگر $a$ در دامنه تعریف $f$، یعنی $S$، باشد، و نقطهٔ حدی $S$ نیز باشد، آنگاه شرطی لازم و کافی برای پیوستگی $f$ در $a$ این است که حد $f$ وقتی $x$ به $a$ میل می‌کند وجود داشته و برابر $f(a)$ باشد. $\square$

توجه کنید که حد، در صورت وجود یگانه است. فرض کنید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L' \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

اگر $L \neq L'$، $|L - L'|$ اکیداً مثبت است. عدد $e > 0$ را طوری می‌گیریم که $e < \frac{1}{2}|L - L'|$. در این صورت $e' > 0$ و $e'' > 0$ وجود دارند که:

$$(x \in S, 0 < |x - a| < e') \Longrightarrow |f(x) - L| < e$$

$$(x \in S, 0 < |x - a| < e'') \Longrightarrow |f(x) - L'| < e$$

بدین ترتیب اگر $\overline{e} = \min\{e', e''\}$، همهٔ نقاط $S$ که در گوی محذوف شعاع $\overline{e}$ حول $a$ قرار دارند هم به داخل گوی شعاع $e$ حول $L$ و هم به داخل گوی شعاع $e$ حول $L'$ نگاشته می‌شوند. این غیرممکن است زیرا $L$ و $L'$ از یکدیگر فاصلهٔ بیش از دو برابر $e$ دارند.

**مثال.** $S$ را زیرمجموعهٔ $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (۰,۰)\}$ از $\mathbb{R}^۲$ بگیرید. نقطهٔ $(۰,۰)$ عضو این مجموعه نیست ولی نقطهٔ حدی آن است. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y) = \frac{x^m y^n}{x^۲ + y^۲}$$

که در آن $m \geq ۰$ و $n \geq ۰$ اعداد صحیح داده شده‌اند. می‌خواهیم $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ را بررسی کنیم. در مختصات قطبی عبارت تابع به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x,y) = r^{m+n-۲} \cos^m \theta \sin^n \theta \quad , \quad r = \text{فاصله } (x,y) \text{ از } (۰,۰) \qquad (۹)$$

**حالت اول.** $(m+n > ۲)$ بنویسید $۰ < p = m+n-۲$. داریم

$$|f(x,y)| \leq r^p$$

زیرا که $|\cos\theta|$ و $|\sin\theta|$ هر دو کوچکتر یا مساوی واحد هستند. حال اگر $e > ۰$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم $۰ < e' \leq \sqrt[p]{e}$. اگر $(x,y)$ در گوی باز محذوف شعاع $e'$ حول $(۰,۰)$ باشد، داریم:

$$|(x,y) - (۰,۰)| < \sqrt[p]{e} \Longrightarrow r^p < e$$

بنابراین $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = ۰$.

**حالت دوم.** $(m+n \leq ۲)$. در اینجا نیز می‌نویسیم $p = m+n-۲$، ولی $p \leq ۰$. داریم:

$$f(x,y) = r^p \cos^m \theta \sin^n \theta$$

اگر $p = ۰$، داریم $f(x,y) = \cos^m\theta \sin^n\theta$ و $f$ روی هر نیم‌خط منتهی به $(۰,۰)$ مقداری ثابت دارد. بنابراین هرگاه $(x,y)$ از روی یک نیم‌خط به $(۰,۰)$ میل کند مقدار (ثابت) تابع به $\cos^m\theta \sin^n\theta$

میل خواهد کرد. با توجه به این که مقدار به $\theta$ بستگی دارد و حد، در صورت وجود، یگانه است، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد. برای $p$ منفی، قرار می‌دهیم $p=-q$ که $q>0$ و داریم:

$$|f(x,y)| = \frac{1}{r^q}|\cos^m\theta||\sin^n\theta|$$

مثلاً برای $\theta=\frac{\pi}{4}$، $|f(x,y)| = \frac{2^{-\frac{m+n}{2}}}{r^q}$. وقتی فاصله $(x,y)$ به $(0,0)$ به صفر میل کند، $r^q$ به صفر میل می‌کند و $|f(x,y)|$ به طور نامحدود بزرگ می‌شود، یعنی به هیچ عدد $L$ میل نمی‌کند.

شباهت‌های تعریف حد و پیوستگی نتایج مشابهی را ایجاب می‌کند. احکام زیر همه اثبات‌هایی کاملاً مشابه احکام نظیر در مورد پیوستگی دارند و اثبات آنها به خواننده واگذار می‌شود.

**(۱۹—۳)** $S\subset\mathbb{R}^n$، $a$ یک نقطهٔ حدی برای $S$، $f:S\longrightarrow\mathbb{R}^m$، $f=(f_1,\ldots,f_m)$ و $L=(L_1,\ldots,L_m)$ عضوی از $\mathbb{R}^m$ است. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f_i(x)=L_i$ برای $i=1,\ldots,m$. □

**(۱۹—۴)** $S\subset\mathbb{R}^n$، $a$ یک نقطهٔ حدی برای $S$، $f:S\longrightarrow\mathbb{R}$، $g:S\longrightarrow\mathbb{R}$، $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L'$. در این صورت تابع‌های $f+g:S\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و $f\cdot g:S\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ تعریف می‌شوند دارای حد هستند وقتی $x$ به $a$ میل کند و در واقع:

$$\lim_{x\to a}((f+g)(x)) = L+L' \qquad (10)$$

$$\lim_{x\to a}((f\cdot g)(x)) = LL' \qquad (11)$$

□

در مورد خارج قسمت در وضعیت بالا، تابع خارج قسمت را به صورت

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

تعریف می‌کنیم. دامنهٔ $\frac{f}{g}$ از آن نقاط $x \in S$ تشکیل شده است که در آن $g(x) \neq 0$. فرض کنید $L' \neq 0$. اگر $e$ را برابر مثلاً $\frac{1}{2}|L'|$ در نظر بگیریم، $e' > 0$ وجود دارد که:

$$(s \in S, |x-a| < e') \Longrightarrow |g(x) - L'| < e = \frac{1}{2}|L'|$$

از این مطلب نتیجه می‌شود که برای $x \in S$ که در گوی محذوف شعاع $e'$ حول $a$ باشند، لزوماً $g(x) \neq 0$. بنابراین دامنهٔ $\frac{f}{g}$ شامل اشتراک $S$ با یک گوی محذوف حول $a$ می‌شود و $a$ یک نقطهٔ حدی برای دامنهٔ $\frac{f}{g}$ است. با این مقدمه، می‌توان مانند حالت پیوستگی ثابت کرد که:

$$\lim_{x \to a}((\frac{f}{g})(x)) = \frac{L}{L'} \qquad (12)$$