پیوستگی و حد (۱)

مفهوم‌های پیوستگی و حد در وضعیت چندمتغیری شباهت کامل به وضعیت یک متغیری دارند. همان انگیزه‌ها و همان روشها در اینجا نیز حکمفرماست. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. نقاط S را به $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و مقدار $f(x)$ را به y نمایش می‌دهیم. در یک مسأله تجربی می‌توان $x_1, \ldots, x_n$ را عواملی دانست که با آزمایش اندازه‌گیری می‌شوند و $f(x_1, \ldots, x_n)$ یک عبارت یا فرمول است که از آن مقدار y محاسبه می‌شود. نقطه‌ای $a = (a_1, \ldots, a_n)$ در دامنهٔ f در نظر بگیرید، یعنی $a \in S$. برای محاسبهٔ مقدار $f(a)$، خطایی $e > 0$ را به عنوان "خطای قابل تحمل" منظور می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان حدود خطایی $e'_1 > 0$، ... ، $e'_n > 0$ برای به ترتیب x_1، ...، x_n پیدا کرد به طوری که اگر برای x در دامنهٔ f، $|x_1 - a_1| < e'_1$، ...، $|x_n - a_n| < e'_n$، آنگاه خطای حاصل در محاسبه، یعنی $|f(x) - f(a)|$ کوچکتر از e باشد؟ اگر بتوان برای هر $e > 0$، مقادیر متناظری $e'_1 > 0$، ...، $e'_n > 0$ با ویژگی بالا پیدا کرد، می‌گوییم "محاسبهٔ f در a پایدار است". اصطلاح معمول‌تر این است که تابع f را در نقطهٔ a پیوسته بنامیم.

مثال ۱. (تابع‌های مستوی) تابع مستوی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

که در آن $c_0, c_1, \ldots, c_n$ اعداد حقیقی داده شده‌اند. نشان می‌دهیم f در همه نقاط $\mathbb{R}^n$ پیوسته است. نقطه‌ای $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید و خطای دلخواهی $e > 0$ منظور کنید. می‌خواهیم $e'_1 > 0$، ...، $e'_n > 0$ را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

معمولاً یافتن $e'_1, \ldots, e'_n$ به این طریق حاصل می‌شود که سعی می‌کنیم عبارت $|f(x) - f(a)|$، یا کمیتی بزرگتر از آن را، طوری بازنویسی کنیم که اثر هر یک از عوامل $|x_1 - a_1|$، ...، $|x_n - a_n|$ در آن ظاهر شود. در اینجا:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) - (c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n)| \\ &= |c_1(x_1 - a_1) + \cdots + c_n(x_n - a_n)| \\ &\leq |c_1||x_1 - a_1| + \cdots + |c_n||x_n - a_n| \end{aligned}$$

حال اگر بتوانیم هر $|c_j||x_j - a_j|$ را کوچکتر از $\frac{e}{n}$ کنیم، نتیجه مطلوب در مورد خطای $f(x)$ به‌دست می‌آید. چون c_j داده شده و معلوم است اگر e'_j برابر (یا کوچکتر از) $\frac{e}{|c_j|n}$ اختیار شود مقصود حاصل می‌شود. تنها مشکل احتمالی این است که ممکن است c_j صفر باشد. برای احتراز از این مشکل $e_j > 0$ را کوچکتر یا مساوی $\frac{e}{(|c_j|+1)n}$ می‌گیریم. در این صورت:

$$\begin{aligned} (|x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| &\leq |c_1||x_1 - a_1| + \cdots + |c_n||x_n - a_n| \\ &< |c_1|\tfrac{e}{(|c_1|+1)n} + \cdots + |c_n|\tfrac{e}{(|c_n|+1)n} \\ &< \tfrac{e}{n} + \cdots + \tfrac{e}{n} = e \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

توجه کنید که تابع‌های مستوی شامل مثال‌های مهم زیر می‌شوند:

الف) تابع‌های ثابت. در اینجا $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

ب) تابع‌های افکنش. مقصود از "تابع افکنش روی مؤلفه j ام" تابع $\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ تعریف می‌شود. در اینجا $c_j = 1$ و سایر c_j ها صفر هستند.

ج) تابع جمع. تابع $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود تابع جمع می‌نامیم:

$$s(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$$

در اینجا $c_0 = 0$ و $c_1 = \cdots = c_n = 1$.

مثال ۲. (تابع ضرب) $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(x, y) = x \cdot y$$

ادعا می‌کنیم p در هر نقطهٔ (a, b) از $\mathbb{R}^2$ پیوسته است. برای خطای داده شدهٔ $e > 0$، باید $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x - a| < e'_1, |y - b| < e'_2) \Longrightarrow |xy - ab| < e$$

در اینجا نیز $|xy - ab|$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |xy - xb + xb - ab| \\ &\leq |x||y - b| + |b||x - a| \end{aligned}$$

مجدداً می‌خواهیم با کوچکتر کردن هر یک از دو عامل جمع در سمت راست از $\frac{e}{2}$، به نتیجه مطلوب برسیم. تنها نکتهٔ جدید در اینجا این است که ضریب $|x|$ در عبارت اول خود متغیر است. برای رفع این مشکل، چون قرار است x به a نزدیک باشد، مقدمتاً x را به بازهٔ $]a - 1, a + 1[$ محدود می‌کنیم، پس با این قید:

$$|x| < |a| + 1$$

و در نتیجه

$$|xy - ab| \leq (|a| + 1)|y - b| + |b||x - a|$$

حال با گرفتن $0 < e'_1 \leq \min\{1, \frac{e}{2(|b|+1)}\}$ و $0 < e'_2 \leq \frac{e}{2(|a|+1)}$، هم قید مقدماتی تأمین می‌شود و هم نامساوی مورد نظر در مورد $|xy - ab|$ به‌دست می‌آید.

مثال ۳. (تابع خارج قسمت) U را مجموعهٔ زیر از $\mathbb{R}^2$ می‌گیریم:

$$U = \{(x,y) \mid y \neq 0\}$$

یعنی U مکمل محور x در صفحهٔ xy است. تابع $q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q(x,y) = \frac{x}{y}$$

ثابت می‌کنیم q در هر نقطه دامنهٔ خود، (a,b)، $b \neq 0$، پیوسته است. برای $e > 0$ داده شده، $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ جستجو می‌کنیم که

$$((x,y) \in U, |x-a| < e'_1, |y-b| < e'_2) \Longrightarrow |\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| < e$$

داریم

$$\begin{aligned} |\tfrac{x}{y} - \tfrac{a}{b}| &= \tfrac{|bx-ay|}{|y||b|} \\ &= \tfrac{|bx-ba+ba-ay|}{|y||b|} \\ &\leq \tfrac{|x-a|}{|y|} + \tfrac{|a||y-b|}{|y||b|} \end{aligned}$$

می‌خواهیم با انتخاب مناسب $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ هر یک از دو عامل طرف راست را از $\frac{e}{2}$ کوچکتر کنیم. با این که $y \neq 0$، از آنجا که فعلاً محدودیتی برای $y \neq 0$ قائل نشده‌ایم، مخرج هر یک از دو عبارت می‌تواند به دلخواه کوچک شود و از این رو در نگاه اول محدود کردن اندازهٔ کسرها مشکل به نظر می‌رسد. ولی توجه کنید که $b \neq 0$ مقداری داده شده است و قرار است y نهایتاً نزدیک b اختیار شود. مقدمتاً y را از نصف فاصلهٔ b به 0 بزرگتر می‌گیریم، یعنی $|y-b| < \frac{b}{2}$، یا $|y| > \frac{|b|}{2}$. این موجب می‌شود که $\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|b|}$، پس با این قید داریم:

$$|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| \leq \frac{2}{|b|}|x-a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y-b|$$

حال ضرایب $|x-a|$ و $|y-b|$ مقادیر ثابتی هستند. $e'_1>0$ و $e'_2>0$ را به طریق زیر اختیار می‌کنیم:

$$0<e'_1\leq\frac{|b|}{4}e \quad , \quad 0<e'_2\leq\min\{\frac{|b|^2}{4(|a|+1)}e,\frac{|b|}{2}\}$$

به این ترتیب اگر $|x-a|<e'_1$ و $|y-b|<e'_2$، هم قید مقدماتی رعایت می‌شود و هم $|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}|<e$ حاصل می‌گردد.

تا اینجا فقط تابع‌هایی را در نظر گرفته‌ایم که برد آنها $\mathbb{R}$ است. حال تابعی $f:S\longrightarrow\mathbb{R}^m$ در نظر بگیرید که در آن $S\subset\mathbb{R}^n$. داریم $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$ که در اینجا هر یک از f_i ها تابعی از S به $\mathbb{R}$ است. از آنجا که محاسبهٔ تابع f به منزلهٔ محاسبهٔ m تابع $f_1,\ldots,f_m$ است، طبیعی است که پیوستگی f در نقطهٔ a را به صورت زیر تعریف کنیم: f را در نقطهٔ $a\in S$ پیوسته می‌نامیم در صورتی که هر یک از f_i ها در نقطهٔ a پیوسته باشد. بدین ترتیب پیوستگی یک تابع با مقدار در $\mathbb{R}^m$ نکتهٔ تازه‌ای ندارد، بلکه باید پیوستگی m تابع مؤلفه را بررسی کرد. با این حال می‌توان صورت معادلی از این تعریف ارائه کرد که شباهت ظاهری بیشتری به تعریف پیوستگی تابع‌های $S\longrightarrow\mathbb{R}$ دارد و تعبیر هندسی بعضاً سودمندی می‌پذیرد. برای این کار نخست نامساوی‌های ساده و اساسی زیر را مطرح می‌کنیم.

(۱۸—۱) فرض کنید $z=(z_1,\ldots,z_p)$ و $w=(w_1,\ldots,w_p)$ که در آن z_i ها و w_i ها اعداد حقیقی هستند. در این صورت

(۱) $$|z_i-w_i|\leq|z-w| \quad \text{برای هر } j=1,\ldots,p$$

(۲) $$|z-w|\leq\sqrt{p}\max\{|z_1-p_1|,\ldots,|z_p-w_p|\}$$

توجه کنید که $|z-w|$ طول (نرم) p تایی $z-w$ است و هر $|z_i-w_i|$ قدرمطلق عدد z_i-w_i می‌باشد. نامساوی (۱) از تعریف $|z-w|^2=\sum_{i=1}^p|z_j-w_j|^2$ نتیجه می‌شود. برای (۲) نیز از همین تعریف

داریم:

$$|z-w|^2 \leq p \max\{|z_1-w_1|^2, \ldots, |z_p-w_p|^2\}$$

که با جذرگیری نتیجهٔ مورد نظر را می‌دهد.

نامساوی (۱) نتیجه می‌دهد که اگر دو p تایی z و w در $\mathbb{R}^p$ نزدیکتر از e باشند، تفاضل مؤلفه‌های متناظر آنها نیز کوچکتر از e است. بالعکس از (۲) می‌بینیم که هرگاه قدرمطلق تفاضل همهٔ مؤلفه‌های متناظر z و w کوچکتر از e باشند، آنگاه فاصلهٔ z از w کوچکتر از $\sqrt{p}e$ است. با توجه به این که در $\mathbb{R}^p$، p یک عدد ثابت است، این دو نامساوی نشان می‌دهند که برای نزدیک کردن z و w لازم و کافی است که همهٔ مؤلفه‌های متناظر z و w به هم نزدیک شوند. با این مقدمه، تعریف پیوستگی تابع‌های $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۱۸ــ۲) گزاره. S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، $a \in S$، و $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع. در این صورت شرطی لازم و کافی برای پیوستگی f در a این است که برای هر $e > 0$، وجود داشته باشد $e' > 0$ که

$$(x \in S, |x-a| < e') \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < e$$

اثبات. نخست فرض می‌کنیم هر f_i در نقطهٔ a پیوسته است و $e > 0$ داده شده است. بنابر فرض پیوستگی، $e'_{i1} > 0$، ...، $e'_{in} > 0$ وجود دارند که:

$$(x \in S, |x_1-a_1| < e'_{i1}, \ldots, |x_n-a_n| < e'_{in}) \Longrightarrow |f_i(x)-f_i(a)| < \frac{e}{\sqrt{m}}$$

بنابراین تحت این شرایط از (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$|f(x)-f(a)| < e$$

از سویی دیگر اگر قرار دهیم $e' = \min\{e'_{ij} \ |i = ۱, \ldots, m; j = ۱, \ldots, n\}$، هرگاه $|x-a| < e'$، می‌توان طبق (۱) نتیجه گرفت که $|x_j - a_j| < e'$ برای هر j، و در نتیجه $|x_j - a_j| < e'_{ij}$، بنابراین:

$$(x \in S, |x-a| < e') \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

بالعکس فرض کنید شرط بالا را بتوان به‌ازای هر $e > ۰$ تأمین کرد، نشان می‌دهیم هر f_i در نقطهٔ a پیوسته است. فرض کنید $e > ۰$ داده شده باشد، می‌خواهیم $e'_۱ > ۰, \ldots, e'_n > ۰$ را طوری اختیار کنیم که:

$$(x \in S, |x_۱ - a_۱| < e'_۱, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < e$$

طبق فرض، $e' > ۰$ وجود دارد که $|x-a| < e'$ و $x \in S$ نتیجه می‌دهند $|f(x) - f(a)| < e$، و در نتیجه طبق (۱)، $|f_i(x) - f_i(a)| < e$ برای هر i. حال تعریف می‌کنیم:

$$e'_۱ = \cdots = e'_n = \frac{e'}{\sqrt{n}}$$

بنابراین طبق (۲):

$$\begin{aligned}(x \in S, |x_۱ - a_۱| < e'_۱, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) &\Longrightarrow (x \in S, |x-a| < e') \\ &\Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e \\ &\Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < e\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

حکم گزارهٔ ۱۸—۲ را می‌توان به صورت هندسی زیر تجسم کرد. مجموعهٔ y های $\mathbb{R}^m$ که در $|y - f(a)| < e$ صدق می‌کنند دقیقاً نقاط گوی باز شعاع e حول $f(a)$ هستند. همین طور مجموعهٔ نقاط $x \in S$ که در $|x-a| < e'$ صدق می‌کنند، دقیقاً آن نقاط گوی باز شعاع e' حول a هستند که در مجموعهٔ S قرار دارند. بنابراین پیوستگی در نقطهٔ a بدین معنی است که به‌ازای هر گوی باز B به شعاع مثبت حول $f(a)$، گوی بازی B' به شعاع مثبت حول a وجود دارد که $f(B' \cap S) \subset B$ (شکل ۱). اگر

به تعریف اولیهٔ مؤلفه‌ای پیوستگی در نقطهٔ a بازگردیم، برای هر f_i و هر e_i، باید $e'_{i1} > 0, \ldots, e'_{in} > 0$ وجود داشته باشند که $|x_j - a_j| < e'_{ij}$، $j = 1, \ldots, n$، و $x \in S$ نتیجه دهد $|f_i(x) - f_i(a)| < e_i$. قرار می‌دهیم $e'_j = \min\{e'_{1j}, \ldots, e'_{nj}\}$، پس

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < e_i, i = 1, \ldots, m)$$

تجسم هندسی این مطلب این است که برای هر مستطیل باز R به مرکز $f(a)$، مستطیل بازی R' به مرکز a وجود دارد که $f(R' \cap S) \subset R$ (شکل ۲). استدلال بالا و استدلال گزارهٔ ۱۸—۲ را می‌توان در این نکته خلاصه کرد که درون هر گوی باز به مرکز یک نقطهٔ p، مستطیل بازی به همان مرکز وجود دارد، و بالعکس درون هر مستطیل باز به مرکز p، یک گوی باز به مرکز p وجود دارد.