# مجموعه‌های تراز (۲)

به بررسی مجموعه‌های تراز تابع‌های درجه دو ادامه می‌دهیم. این بار تابع‌های درجه دو $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. همان طور که در جلسهٔ قبل اشاره کردیم، می‌توان با دوران محورهای مختصات جملات مخلوط را حذف و $f$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$f(x,y,z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 \qquad (1)$$

مجموعه‌های تراز چنین تابعی رویه‌های درجه دوم خوانده می‌شوند. در زیر تعدادی مثال بررسی می‌کنیم.

**مثال ۱.** (بیضی‌وار) رویهٔ

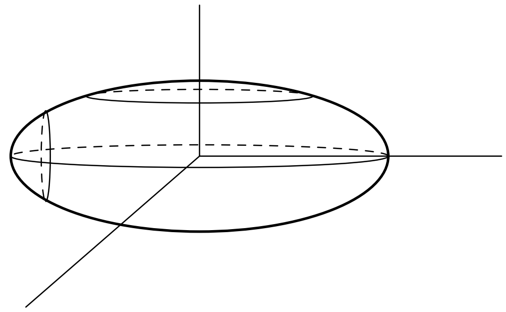
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a,b,c > 0 \qquad (2)$$

بیضی‌وار نام دارد. برای دستیابی به شکل این رویه در $\mathbb{R}^3$، تقاطع آن را با صفحات موازی صفحات مختصاتی بررسی می‌کنیم. مثلاً اشتراک (۲) را با صفحهٔ $z = k$ در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases} \qquad (3)$$

اشتراک به‌ازای $|k| > c$ تهی است، به‌ازای $k = \pm c$، دو نقطهٔ $(0,0,\pm c)$ به‌دست می‌آیند، و برای $|k| < c$، با تقسیم دو طرف رابطهٔ اول (۳) بر $1 - \frac{k^2}{c^2}$ یک بیضی در صفحهٔ $z = k$ به‌دست می‌آوریم.

عیناً وضعیت مشابه برای اشتراک‌های $x=k$ و $y=k$ وجود دارد. رویهٔ (۲) در شکل ۱ نمایش داده شده است.

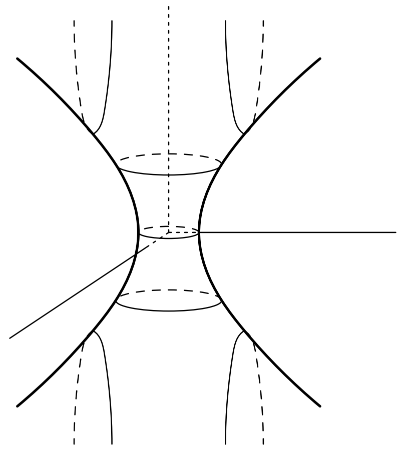


شکل ۱

**مثال ۲.** (هذلولی‌وار یکپارچه) رویهٔ زیر را در نظر می‌گیریم که هذلولی‌وار یکپارچه نام دارد:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱ \qquad a,b,c>۰ \tag{۴}$$

مجدداً روش بررسی شکل این رویه، یافتن تقاطع رویه با صفحات موازی صفحات مختصاتی است. برای $z=k$، بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱+\frac{k^۲}{c^۲}$ در صفحهٔ $z=k$ به‌دست می‌آید. کوچکترین بیضی به‌ازای $k=۰$ در صفحهٔ $xy$ حاصل می‌شود و به طور کلی طول نیم‌قطرها برابر $a\sqrt{۱+\frac{k^۲}{c^۲}}$ و $b\sqrt{۱+\frac{k^۲}{c^۲}}$ است. برای تقاطع $x=k$ و $y=k$، به جای بیضی، به ترتیب هذلولی $\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱-\frac{k^۲}{a^۲}$ در صفحه $x=k$ و هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱-\frac{k^۲}{b^۲}$، را به‌دست می‌آوریم. در شکل (۲) رویهٔ (۴) نمایش داده شده است.



شکل ۲

**مثال ۳.** (هذلولی‌وار دوپارچه) این نام به مجموعهٔ $(x,y,z)$ ها که در رابطه‌ای به صورت زیر صدق می‌کنند اطلاق می‌شود:

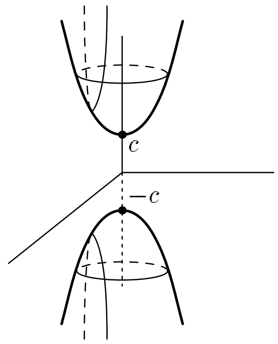
$$-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱ \qquad a,b,c>۰ \tag{۵}$$

در اینجا تقاطع $x=k$ و $y=k$ همانند مثال قبل هذلولی هستند. برای $z=k$ داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}=\dfrac{k^۲}{c^۲}-۱ \\ z=k \end{cases} \tag{۶}$$

مشاهده می‌کنیم که به‌ازای $|k|>c$ یک بیضی در صفحه $z=k$ به‌دست می‌آید، برای $k=\pm c$، دو تک نقطه‌ای $(۰,۰,\pm c)$ به ترتیب در صفحات $z=c$ و $z=-c$ حاصل می‌شوند و برای $|k|<c$

اشتراک تهی است. هذلولی‌وار دو پارچه در شکل ۳ نمایش داد شده است.

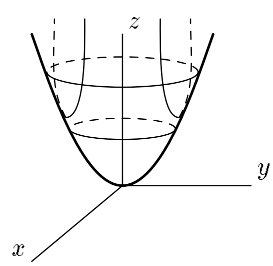



شکل ۳

**مثال ۴.** (سهمی‌وار بیضوی) اصطلاح سهمی‌وار بیضوی به مجموعه‌های $(x,y,z)$ که در معادلاتی چون $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ یا $z=-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ صدق می‌کنند اطلاق می‌شود. مثلاً مجموعه $(x,y,z)$ هایی را در نظر بگیرید که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad a,b>0 \tag{7}$$

مقطع این مجموعه با $z=k$ به ترتیب یک بیضی، تک نقطه‌ای $(0,0,0)$ و تهی است بسته به این که $k>0$، $k=0$ یا $k<0$. هر مقطع $x=k$ و $y=k$ نیز یک سهمی است. بدین ترتیب شکل ۴ حاصل می‌شود.

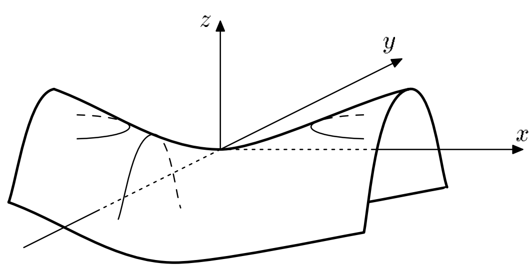



شکل ۴

**مثال ۵.** (سهمی‌وار هذلولوی) اگر علامت یکی از دو عبارت سمت راست (۷) را به منفی مبدل کنیم یک سهمی‌وار هذلولوی به‌دست می‌آید:

$$z = \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} \qquad a, b > ۰ \tag{۸}$$

مقطع $z = ۰$ یک جفت خط راست متقاطع $bx \pm ay = ۰$ است و به‌ازای $z = k \neq ۰$ یک هذلولوی به‌دست می‌آید که امتداد بازشدن آن برای $k > ۰$ و $k < ۰$ به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ چرخش دارد. تقاطع $x = k$ و $y = k$ سهمی هستند (شکل ۵)




شکل ۵

**مثال ۶.** (مخروط) مجموعهٔ نقاط $(x, y, z)$ که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند در نظر بگیرید:

$$\frac{z^۲}{c^۲} = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} \qquad a, b, c > ۰ \tag{۹}$$

تقاطع $z = k$ به‌ازای $k \neq ۰$ بیضی و مقطع با $z = ۰$ تک نقطه‌ای $(۰, ۰, ۰)$ است. برای $x = k$ و $y = k$ مقطع یک هذلولی است. مقطع صفحهٔ قائم $Ax + By = ۰$ را با این شکل به‌دست می‌آوریم. دست‌کم یکی از $A$ و $B$ ناصفر است، مثلاً $A \neq ۰$. با جایگزینی در (۹) داریم:

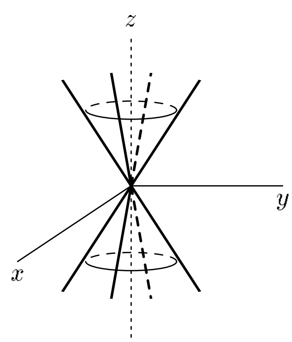
$$\frac{z^۲}{c^۲} = \frac{B^۲}{A^۲a^۲}y^۲ + \frac{y^۲}{b^۲}$$

اگر $\frac{1}{b^2} + \frac{B^2}{A^2 a^2}$ را به $\frac{1}{p^2}$ نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{p^2} = 0$$

$$(\frac{z}{c} - \frac{y}{p})(\frac{z}{c} + \frac{y}{p}) = 0$$

پس تصویر مقطع روی صفحهٔ $yz$ دو خط متقاطع است. با توجه به این که مقطع روی صفحه $Ax + By = 0$ قرار دارد، مقطع خود از دو خط راست تشکیل شده است. این مخروط در شکل ۶ نمایش داده شده است.



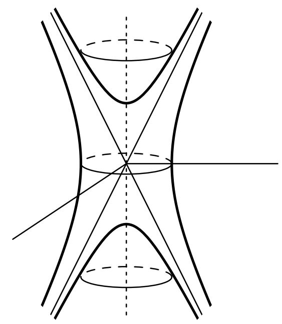

شکل ۶

مخروط را می‌توان حالت گذر از هذلولی‌وار یکپارچه به هذلولی‌وار دوپارچه تلقی کرد. تابع $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \qquad (10)$$

که در آن $a, b, c > 0$ داده شده‌اند. مجموعه‌های تراز $f$ را بررسی می‌کنیم. به‌ازای $k > 0$، $f^{-1}(k)$ یک هذلولی‌وار یکپارچه است. با میل دادن $k > 0$ به سمت صفر، بیضی مرکزی این هذلولی‌وار تدریجاً کوچکتر می‌شود تا به‌ازای $k = 0$ این بیضی تبدیل به یک نقطه می‌شود و مخروط $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ پدید می‌آید. وقتی $k$ از صفر گذر کرده و منفی می‌شود، یعنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k < 0$ رویه به یک هذلولی‌وار دوپارچه مبدل می‌شود. می‌توان موضوع را اینگونه

تلقی کرد که با گذر از صفر به مقادیر منفی، دو شاخهٔ مخروط از هم جدا می‌شوند (شکل ۷)



شکل ۷

قابل ذکر است که همهٔ هذلولی‌وارهایی که مجموعهٔ تراز این تابع هستند نسبت به مخروط فوق مجانبند.

شش مثال بالا بیشتر حالت‌های غیر استثنایی مجموعه‌های تراز یک تابع درجهٔ دوم سه متغیری را در بر می‌گیرد (در واقع مخروط را می‌توان یک حالت استثنایی تلقی کرد). یک مورد اساسی دیگر موجود است و آن وقتی است که یکی از سه متغیر به درجه دو و دوتای دیگر با درجه اول ظاهر می‌شوند. برای بررسی این مورد نخست وضعیت زیر را در نظر بگیرید.

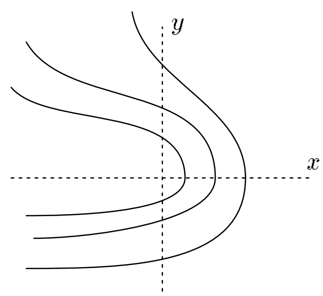
**مثال ۷.** (استوانه) فرض کنید $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

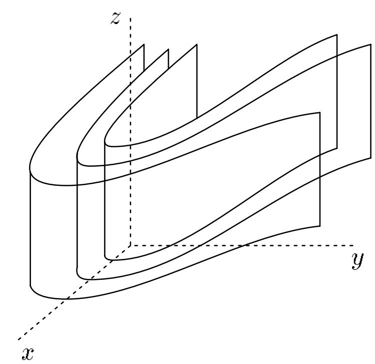
$$f(x, y, z) = g(x, y) \tag{۱۱}$$

که در آن $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. مجموعه‌های تراز $f$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f^{-1}(k) &= \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = k\} \\ &= \{(x, y, z) \mid g(x, y) = k, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

بدین ترتیب مجموعهٔ تراز $f^{-1}(k)$ بدین طریق به‌دست می‌آید که مجموعه تراز $g^{-1}(k)$ را در صفحه $xy$ در نظر می‌گیریم و آن را به موازات محور $z$ در فضای سه‌بعدی امتداد می‌دهیم. شکل به‌دست آمده یک استوانه نام دارد. برای تابع‌های هر تعداد متغیر، هرگاه یک یا چند متغیر در عبارت تعریف کنندهٔ تابع ظاهر نشوند یک استوانه به مفهوم عام به‌دست می‌آید.



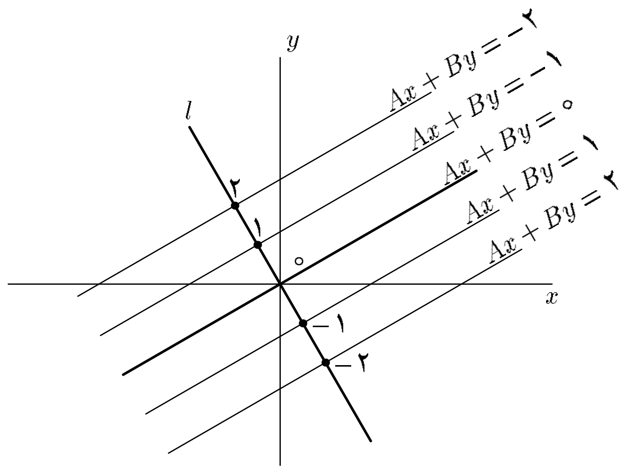

شکل ۸

**مثال ۸.** حال مجموعهٔ $(x, y, z)$ هایی را در نظر بگیرید که در رابطهٔ

$$Ax + By + Cz^{۲} = ۰ \qquad (۱۲)$$

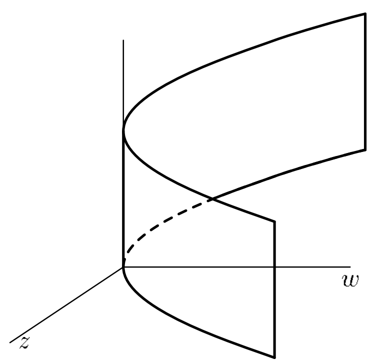
صدق می‌کنند. در اینجا $A$، $B$ و $C$ اعداد حقیقی داده شده‌اند. قرار می‌دهیم $w = Ax + By$. خطوط راست $Ax + By = k$، $k \in \mathbb{R}$ داده شده، در صفحه $xy$ موازی هستند. فرض کنید $l$ خط گذرا از $\underline{\circ}$ در صفحهٔ $xy$ عمود بر این خطوط باشد. خط $l$ را محور $w$ می‌نامیم و هر نقطهٔ آن را با مقدار ثابت $w$ از

خط راست $Ax + By = w$ که در آن نقطه خط $l$ را قطع می‌کند مدرج می‌کنیم (شکل ۹)




شکل ۹

حال در صفحه $zw$ منحنی $w + cz^{۲} = ۰$ را رسم می‌کنیم که یک سهمی است. اگر این سهمی را در جهت عمود بر صفحه $zw$ امتداد دهیم استوانه‌ای به‌دست می‌آید که مکان هندسی (۱۲) است (شکل ۱۰)




شکل ۱۰

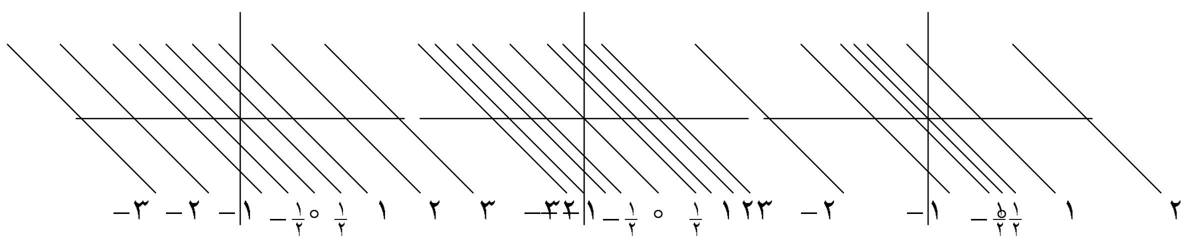
در پایان سؤال زیر را مطرح می‌کنیم. دیدیم که تابع‌های درجه ۱ (مستوی، خطی) دارای مجموعه‌های تراز مستوی، موازی و همبعد هستند، و تابع‌های درجه ۲ نیز از شکل‌های ویژه‌ای برخوردارند. تا چه حد می‌توان ماهیت یک تابع را از شکل مجموعه‌های تراز آن تعیین کرد؟ به عنوان

ساده‌ترین حالت، فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ طوری باشد که مجموعه‌های تراز آن خطوط راست موازی باشند.  آیا $f$ لزوماً خطی یا مستوی است؟ جواب این سؤال منفی است:

**مثال ۹.** سه تابع زیر از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید:

$$h(x,y)=\sqrt[3]{x+y} \quad , \quad g(x,y)=(x+y)^3 \quad , \quad f(x,y)=x+y$$

طرف راست هر یک از این عبارت‌ها را برابر مقداری ثابت قرار دهیم نتیجه می‌شود که $x+y$ ثابت است، و هر تابع هر مقدار ثابت را روی دقیقاً یک خط راست موازی $x+y=0$ می‌گیرد.  در شکل (۱۱) مجموعه‌های تراز این سه تابع به‌ازای مقدار مختلف نمایش داده شده‌اند.  مجموعه‌های تراز به‌ازای $c=0,\pm 1$ برای هر سه تابع یکی هستند.  در مورد تابع خطی $f$ به‌ازای مقادیر متوالی و



شکل ۱۱

هم فاصلهٔ $c$، مثلاً $-2,-1,0,1,2$، مجموعه‌های تراز مربوط از هم هم فاصله‌اند.  برای تابع $g$، برای $|c|>1$، مجموعه‌های تراز برای مقادیر هم فاصلهٔ $c$ کندتر از مورد $f$ از هم دور می‌شوند، و برعکس برای $h$، برای $|c|>1$، مجموعه‌های تراز برای مقادیر هم فاصلهٔ $c$ فواصل فزاینده‌ای دارند. عکس این وضعیت برای مقادیر $|c|<1$ رخ می‌دهد.  به طور کلی نزدیکی و تمرکز مجموعه‌های تراز برای مقادیر هم فاصله دلیل بر رشد سریع تابع و بالعکس دوری نسبی آنها نشان رشد کند تابع است. مثلاً در این مثال، برای $|c|>1$، تابع با مقدار $(x+y)^3$ سریعتر از $x+y$ و $x+y$ سریعتر از $(x+y)^{\frac{1}{3}}$ رشد می‌کند.  این روند برای مقادیر $|c|<1$ وقتی از ۱ به ۰ نزدیک می‌شویم معکوس می‌شود.

فرض کنید $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک باشد و $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دلخواه. در این صورت مجموعه‌های تراز $g = \phi \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ همان مجموعه‌های تراز $f$ هستند منتها به‌ازای مقادیر متفاوت، که تحت $\phi$ جابجا می‌شوند. در مثال بالا، برای $g$ داریم $\phi(t) = t^3$ و برای $h$، $\phi(t) = t^{\frac{1}{3}}$. بالعکس اگر تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد و $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای همان مجموعه‌های تراز $f$ با مقادیر جابجا شده باشد، می‌توان نوشت $g = \phi \circ f$ که $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$، $S$ مجموعهٔ مقادیر ممکن $f$، و $\phi$ جابجا کنندهٔ مقادیر $f$ است.