# مجموعه‌های تراز (۱)

به دنبال معرفی کلی مجموعه‌های تراز، اکنون مثال‌هایی مطرح می‌کنیم.

**مثال ۱.** فرض کنید $A:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت مستوی باشد. $A$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A(x) = L(x) + B \qquad \text{برای هر } x \in \mathbb{R}^n \tag{۱}$$

که در آن $L$ یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ است و $B$ یک عنصر ثابت $\mathbb{R}^m$. مجموعه‌های تراز $A$ و $L$ یکی هستند، در واقع

$$A^{-۱}(c+B) = L^{-۱}(c)$$

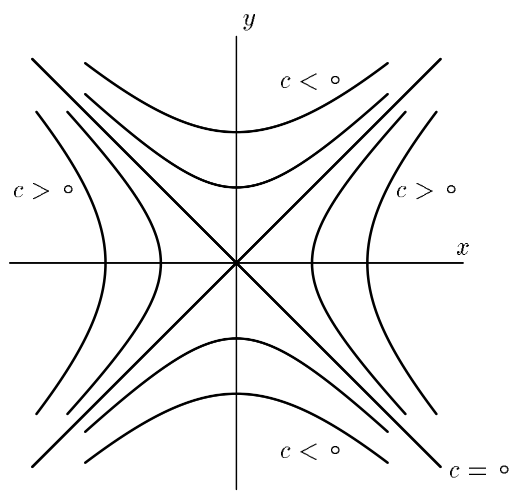
یعنی مجموعهٔ تراز منسوب به $c$ برای $L$ همان مجموعهٔ تراز منسوب به $c+B$ برای $A$ است. برای تابع خطی $L$ می‌دانیم که مجموعه‌های تراز یا تهی هستند و یا زیرفضاهای خطی موازی و همبعد هستهٔ $L$ می‌باشند.

**مثال ۲.** $f:\mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های تراز $f$ را برای مقادیر مختلف $c \in \mathbb{R}$ بررسی می‌کنیم. برای $c < ۰$، مجموعهٔ تراز منسوب تهی است، برای $c = ۰$، تک نقطه‌ای $\{(۰,۰,۰)\}$ حاصل می‌شود، و برای $c > ۰$، کرهٔ شعاع $\sqrt{c}$، یعنی مجموعهٔ نقاط $(x,y,z)$ بقیه به شرط $x^۲ + y^۲ + z^۲ = c$ به‌دست می‌آید.

**مثال ۳.** تابع $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که به صورت $f(x,y)=x^2-y^2$ تعریف شده است. نمودار این تابع را در مثال ۴ بخش قبل بررسی کردیم، اکنون به بررسی مجموعه‌های تراز می‌پردازیم. برای $c=0$، مجموعهٔ

$$\{(x,y) \mid x^2-y^2=0\} = \{(x,y) \mid x-y=0 \text{ یا } x+y=0\}$$

از دو خط راست $x+y=0$ و $x-y=0$ تشکیل شده است. برای $c>0$، هذلولوی دو شاخهٔ $x^2-y^2=c$ به‌دست می‌آید که رئوس شاخه‌ها در نقاط $(\pm\sqrt{c},0)$ قرار دارند و شاخه‌ها به طرف راست و چپ باز می‌شوند. برای $c<0$، نقش $x$ و $y$ تعویض می‌شود. این بار دو رأس هذلولوی در $(0,\pm\sqrt{c})$ قرار دارند و هذلولوی به طرف بالا و پایین باز می‌شود (شکل ۱).




شکل ۱

ارتباط این شکل با نمودار $z=x^2-y^2$ به طریق زیر حاصل می‌شود. به‌ازای $z=c$ با تقاطع صفحه $z=c$ با نمودار متشکل از نقاط به شکل $(x,y,c)$ است. اگر این مقطع را بر صفحهٔ $xy$ تصویر کنیم دقیقاً مجموعهٔ تراز منسوب به $c$ حاصل می‌شود.

مطلب فوق برای هر تابع $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ معتبر است. اگر نمودار تابع را با صفحهٔ $z=c$ قطع کنیم دقیقاً آن بخش نمودار به‌دست می‌آید که بالا سر مجموعهٔ تراز منسوب به $c$ قرار دارد. بدین ترتیب اگر

نمودار تابع در دست باشد با قطع کردن آن به وسیلهٔ صفحات $z = c$ و تصویر کردن روی صفحه $xy$، مجموعه‌های تراز $f$ حاصل می‌شوند. بالعکس چنانچه مجموعه‌های تراز رسم شده باشند، با انتقال هر مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ به ارتفاع $z = c$، نمودار تابع بازسازی می‌شود.

**مثال ۴.** فرض کنید $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد که $a \neq \underline{0}$. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \cdot x \tag{2}$$

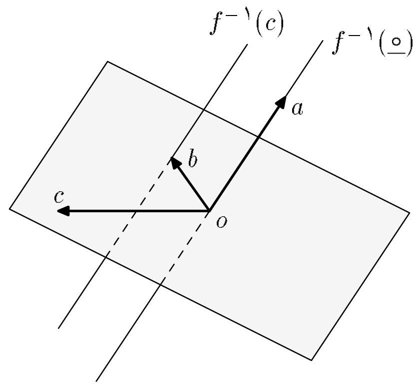
چون $a \cdot x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$، این در واقع یک تابع خطی است و در مثال ۱ می‌گنجد ولی بررسی مستقیم آن نیز قابل توجه است. می‌دانیم که مجموعهٔ $x$ هایی که در $a \cdot x = c$ صدق می‌کنند یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ است و این ابرصفحه‌ها همه موازی $a \cdot x = 0$ (هستهٔ $f$ = مجموعهٔ $x$ هایی که $x \perp a$) می‌باشند.

**مثال ۵.** عضوی ثابت $a \neq \underline{0}$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \times x \tag{3}$$

که مقصود از $a \times x$ ضرب برداری $a$ و $x$ است. تابع (۳) نیز خطی است (هر مؤلفه عبارت درجه ۱ همگن نسبت به $x_1, x_2, x_3$ است) و در چارچوب مثال ۱ قرار می‌گیرد. این مثال را نیز مستقیماً بررسی می‌کنیم. از آنجا که $a \times x$ بر $a$ عمود است، اگر $c \in \mathbb{R}^3$ در صفحه گذرا از $\underline{0}$ و عمود بر $a$ قرار نداشته باشد، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ تهی است. برای $c = \underline{0}$، مجموعهٔ $x$ هایی که در $a \times x = \underline{0}$ صدق می‌کنند مضارب بردار $a$ هستند، یعنی نقاط روی خطی که از امتداد $a$ پدید می‌آید. این در واقع هستهٔ تابع خطی $f$ است. پس سایر مجموعه‌های تراز ناتهی خطوط راست موازی $a$ می‌باشند. در واقع

اشتراک $f^{-1}(c)$ با صفحه عمود بر $a$ باید یگانه بردار $b$ در این صفحه باشد که $(a,b,c)$ یک سه‌تایی راستگرد است و مساحت مستطیل تعیین شده توسط $a$ و $b$ برابر طول $c$ می‌باشد.




شکل ۲

**مثال ۶.** تابع $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را به صورت

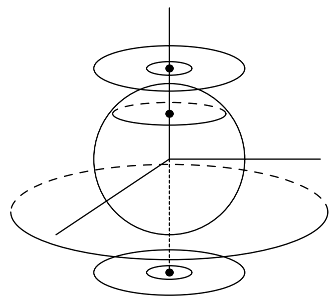
$$f(x,y,z)=(z,x^2+y^2+z^2)$$

تعریف می‌کنیم. به‌ازای $c=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ عبارت است از:

$$\{(x,y,z)\mid z=c_1\}\cap\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=c_2\}$$

برای $c_2<0$، مجموعهٔ سمت راست و در نتیجه $f^{-1}(c)$ تهی است. برای $c_2=0$، مجموعهٔ سمت راست از تک نقطه‌ای $\{(0,0,0)\}$ تشکیل شده است، پس $f^{-1}(c_1,0)$ تهی است مگر وقتی که $c_1=0$، و $f^{-1}(0,0)$ نیز تک نقطه‌ای $\{(0,0,0)\}$ است. حال فرض کنید $c_2>0$. مجموعهٔ سمت راست، یعنی $f_2^{-1}(c_2)$ کرهٔ شعاع $\sqrt{c_2}$ به مرکز $\underline{0}$ است. برای این که مجموعهٔ سمت چپ، یعنی $f_1^{-1}(c_1)$، با $f_2^{-1}(c_2)$ اشتراک ناتهی داشته باشد، شرط لازم و کافی این است که $-\sqrt{c_2}\leq c_1\leq\sqrt{c_2}$. وقتی $c_1=\pm\sqrt{c_2}$، صفحهٔ $z=\pm\sqrt{c_2}$ بر کره مماس می‌شود و یک تک

نقطه‌ای به عنوان مجموعهٔ تراز حاصل می‌شود ($(0,0,\pm\sqrt{c_2})$ بسته به این که صفحه $z=\sqrt{c_2}$ یا صفحه $z=-\sqrt{c_2}$ در نظر گرفته شود). برای $-\sqrt{c_2}<c_1<\sqrt{c_2}$، $f^{-1}(c_1,c_2)$ دایرهٔ تقاطع کره با صفحهٔ $z=c_1$ است. بدین ترتیب مجموعه‌های تراز ناتهی تابع $f$ عبارتند از تک نقطه‌ای‌های روی محور $z$ و دایره‌های به مرکز روی محور $z$ که در صفحات افقی $z=c$ قرار دارند.



شکل ۳

در اینجا مسأله زیر را مطرح می‌کنیم. در مورد تابع‌های مستوی دیدیم که مجموعه‌های تراز شکل‌های ساده و یکنواختی دارند. به عنوان گام بعدی، آیا می‌توان حکمی کلی در مورد مجموعه‌های تراز یک تابع درجه ۲ عنوان کرد؟ تابع $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (4)$$

که در اینجا $a_i$ ها و $a_{ij}$ ها اعداد حقیقی داده شده‌اند. طرف راست (۴) کلی‌ترین عبارت درجه دوم برحسب $x_1,\ldots,x_n$ است. سؤال این است که مجموعه‌های تراز تابعی به شکل $f$ در (۴) چگونه اشکالی هستند. در آینده خواهیم دید که با "دوران" مناسب در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌توان فقط صورت‌هایی از (۴) را در نظر گرفت که در آن جملات مخلوط درجه دوم، یعنی $x_ix_j$ با $i\neq j$، وجود نداشته باشند، یعنی کافی است تابع‌های درجه دوم به شکل زیر را در نظر بگیریم:

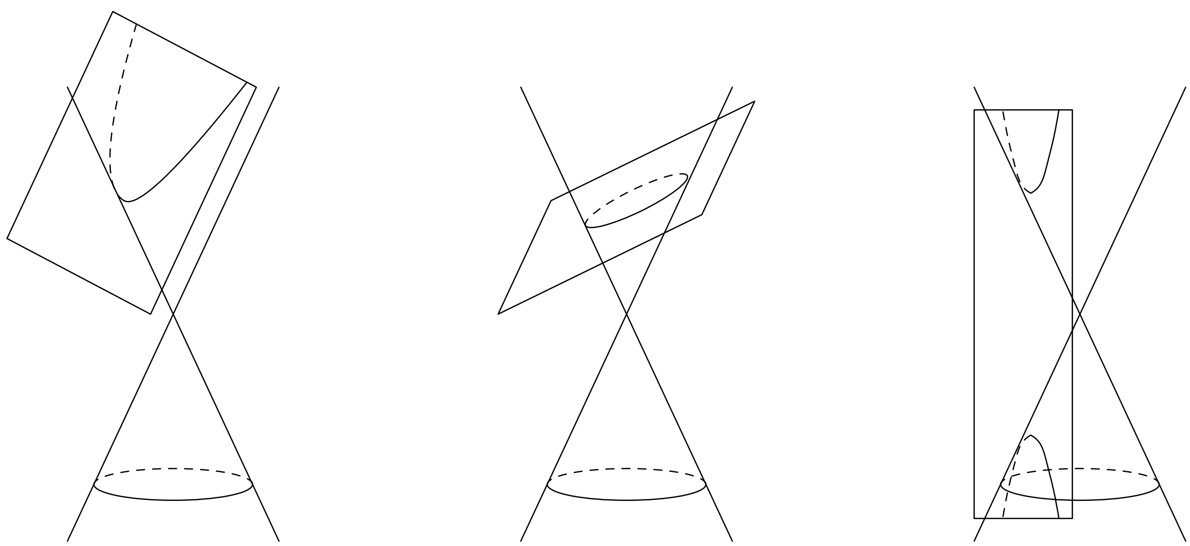
$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \qquad (5)$$

در این بخش و بخش بعد دو حالت $n=2$ و $n=3$ را توصیف می‌کنیم.

در حالت ۲ $= n$ اگر به جای $x_1$ و $x_2$ نمادهای معمولتر $x$ و $y$ را به‌کار گیریم، داریم

$$f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 \qquad (6)$$

مجموعه‌های تراز چنین تابعی به مقاطع مخروطی معروفند به این دلیل که از نظر هندسی این منحنی‌ها را می‌توان به صورت مقطع یک صفحه و یک مخروط به‌دست آورد (شکل ۴). در واقع مقاطع مخروطی از دوران باستان شناخته شده بودند و کتاب مخروطات آپولونیوس که بیش از ۲۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده رسالهٔ جامعی در بررسی این اشکال است. سه شکل "سهمی"، "بیضی" و "هذلولی" که در شکل نمایش داده شده‌اند، سه نوع عمدهٔ مقاطع مخروطی هستند.



شکل ۴

حال برای $f$ در (٦) می‌خواهیم مجموعهٔ $(x,y)$ هایی را که در $f(x,y) = 0$ صدق می‌کنند بررسی کنیم. در (٦) می‌توانیم قرار دهیم $a_0 = 0$ زیرا با جذب $a_0$ در $c$ مجموعه‌های تراز $f(x,y) = c$ همهٔ حالات ممکن را در بر می‌گیرد. چند حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $a_{11} = a_{22} = 0$. در این حالت در وضعیت تابع‌های مستوی قرار می‌گیریم که قبلاً بررسی شده‌اند.

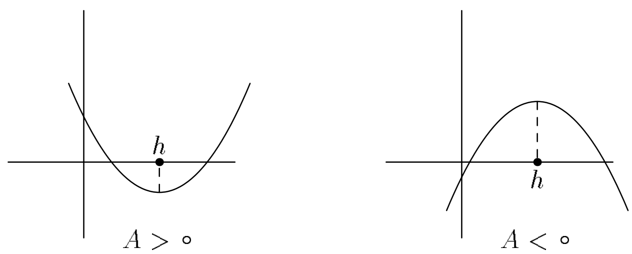
ب) یکی از $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ صفر و دیگری ناصفر. مثلاً فرض کنید $a_{۱۱} \neq ۰$ و $a_{۲۲} = ۰$. در این صورت با تکمیل مجذور، $f$ به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x,y) = A_{۰} + a_{۱۱}(x-h)^{۲} + a_{۲}y \qquad (۷)$$

اگر $a_{۲} \neq ۰$، با قرار دادن $f(x,y) = ۰$ و تقسیم بر $a_{۲}$، عبارتی به شکل:

$$y = A(x-h)^{۲} + B \quad , \quad A = \frac{a_{۱۱}}{a_{۲}} \neq ۰$$

به‌دست می‌آید. که سهمی نام دارد. بسته به این که $A > ۰$ یا $A < ۰$ یکی از دو منحنی نمایش داده شده در شکل ۵ حاصل می‌شود.




شکل ۵

به عنوان مقطع مخروطی، سهمی از تقاطع یک صفحه موازی یکی از خطوط مولد مخروط به‌دست می‌آید. اگر در (۷) داشته باشیم $a_{۲} = ۰$، آنگاه $f(x,y) = ۰$، بسته به علامت $A_{۰}$ و $a_{۱۱}$، دو خط راست قائم، یک خط راست یا تهی است.

حال فرض کنید $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ هر دو ناصفر باشند. در این صورت با تکمیل مجذورها در (٦) به عبارت زیر می‌رسیم:

$$f(x,y) = a_{۱۱}(x-h)^{۲} + a_{۲۲}(y-k)^{۲} + A_{۰} \qquad (۸)$$

در اینجا دو حالت در نظر می‌گیریم:

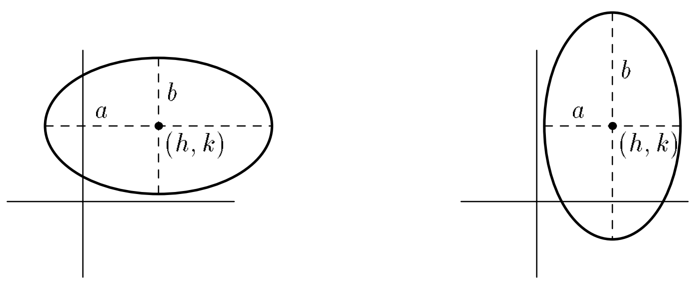
ج) $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ هم‌علامت باشند. در این صورت اگر $A_۰$ نیز هم‌علامت با $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ باشد، $f(x,y)$ همواره مثبت یا همواره منفی است، یعنی در $f(x,y)=۰$ هیچ نقطه‌ای صدق نمی‌کند. اگر $A_۰=۰$، آنگاه تنها نقطه $(h,k)$ در $f(x,y)=۰$ صدق می‌کند. بالاخره اگر علامت $A_۰$ از علامت $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ متفاوت باشد، در $f(x,y)=۰$، $A_۰$ را به طرف دیگر معادله برده بر $-A_۰$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(x-h)^۲}{-A_۰/a_{۱۱}}+\frac{(y-k)^۲}{-A_۰/a_{۲۲}}=۱$$

از آنجا که علامت $A_۰$ با علامت $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ متفاوت بود، هر یک از دو مخرج بالا مثبت است و می‌توان هر یک را به صورت یک مجذور نوشت، پس داریم:

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲}+\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱ \qquad (۹)$$

این معادلهٔ یک بیضی به مرکز نقطهٔ $(h,k)$ است (شکل ٦).




$a > b$ $\qquad$ $a < b$

شکل ٦

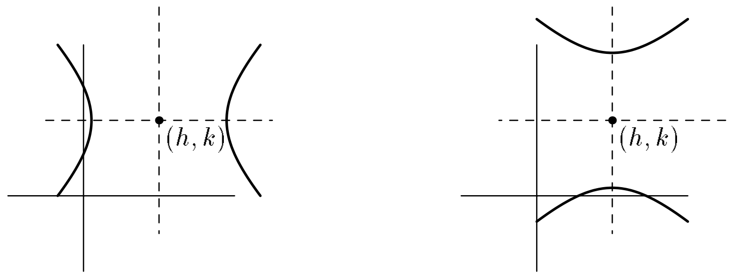
د) $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ مختلف العلامه باشند. در این صورت نیز اگر $A_۰\neq ۰$، با محاسبه‌ای عیناً مانند فوق به یکی از دو عبارت زیر می‌رسیم (بسته به این که $A_۰$ با کدامیک از $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ هم‌علامت باشد):

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲}-\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱ \qquad (۱۰)$$

یا

$$-\frac{(x-h)^۲}{a^۲}+\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱ \qquad (۱۱)$$

هر یک از این دو منحنی یک هذلولی نام دارد. هر هذلولی از دو شاخه قرینه تشکیل شده است (شکل ۷)




شکل ۷

بالاخره در این حالت اگر $A_0 = 0$، آنگاه $f(x,y) = 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a^2(x-h)^2 - b^2(y-k)^2 = 0 \qquad (12)$$

که در آن $a^2 = |a_{11}|$ و $b^2 = |a_{22}|$. این نمایش جبری دو خط راست متقاطع با ضریب زاویه‌های $\pm\frac{a}{b}$ است که از نقطهٔ $(h,k)$ می‌گذرند. ضمناً هر یک از شاخه‌های هذلولی‌های (۱۰) و (۱۱) بر دو خط راست (۱۲) مجانبند.