تابع‌های چند متغیری

فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است. می‌خواهیم تابع‌های $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را بررسی کنیم. بدین ترتیب f به هر n تایی $x = (x_۱, \ldots, x_n)$، یک m تایی $f(x) = y = (y_۱, \ldots, y_m)$ نسبت می‌دهد:

$$y = f(x) \tag{۱}$$

هر y_i خود به $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ وابسته است و می‌توان f را متشکل از m تابع $f_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ دانست که $y_i = f_i(x_۱, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} y_۱ = f_۱(x_۱, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_۱, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{۲}$$

می‌نویسیم $f = (f_۱, \ldots, f_m)$ و هر f_i را یک مؤلفه f می‌نامیم.

اگر S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، یعنی $n = ۱$، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، یعنی $m = ۱$، عادت داریم که از نمودار f یعنی زیرمجموعهٔ $\{(x, f(x)) \mid x \in S\}$ از $\mathbb{R}^۲$ برای تجسم تابع استفاده کنیم. بسیاری اوقات می‌توان با نگاه کردن به نمودار f خصوصیات رفتاری f را به سادگی دریافت. در مورد تابع‌های $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، به بررسی سه روش "نمودار"، "تصویر"، و "مجموعه تراز" برای تجسم هندسی رفتار تابع می‌پردازیم. هر یک از این روش‌ها در محدودهٔ خاصی از ترکیب بعدها، یعنی m و n، کارساز است.

(۱۵—۱) نمودار. برای تابع $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، نمودار f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in S\} \tag{۳}$$

توجه کنید که $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ یک n تایی و $f(x) = (f_۱(x), \ldots, f_m(x))$ یک m تایی است، بنابراین هر نقطهٔ نمودار یک $(n+m)$ تایی است یعنی نمودار یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^{n+m}$ است. این نکته اشکال استفاده از نمودار در ابعاد بالا را روشن می‌سازد. وقتی $n+m$ از ۳ بزرگتر باشد نمی‌توان از نیروی باصره برای تجسم نمودار و مشاهدهٔ رفتار تابع یاری جست. استفادهٔ ما از نمودار معمولاً محدود به حالت‌های $m = n = ۱$ و $n = ۲$، $m = ۱$، است. در حالت $n = ۱$، $m = ۲$ نیز که مربوط به خم‌های پارامتری در صفحه می‌شود، روش بعدی ما (بررسی "تصویر") معمولاً مؤثرتر است. در زیر تعدادی مثال برای حالت $n = ۲$، $m = ۱$، مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $f: \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y,z) = Ax + By + C$ در نظر می‌گیریم که در آن A، B و C اعداد حقیقی داده شده‌اند. اگر مقدار $f(x,y)$ را به z نمایش دهیم، نمودار تابع عبارت است از مجموعهٔ:

$$\{(x,y,z) \mid z = Ax + By + C\}$$

بدین ترتیب نقاط (x,y,z) روی نمودار دقیقاً نقاطی هستند که در رابطهٔ $Ax + By - z + C = ۰$ صدق می‌کنند. این مجموعه یک صفحه در $\mathbb{R}^۳$ است که با محور z موازی نیست (بر صفحه xy عمود نیست).

مثال ۲. تابع $f: \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ تعریف می‌کنیم. می‌نویسیم $z = f(x,y)$. نسبت به مختصات قطبی داریم $z = r^۲$، یعنی نقاط نمودار، (x,y,z)، به این ترتیب به‌دست می‌آیند که اگر xy را صفحه افقی و محور z را عمود بر آن تصور کنیم، نقطهٔ (x,y,z) که

بالاسر (x,y) قرار دارد، ارتفاعش از صفحه xy برابر مجذور فاصلهٔ (x,y) از $\underline{o}$ است. بدین ترتیب نمودار f از دوران دادن یک سهمی حول محور z به‌دست می‌آید (شکل ۱).

مثال ۳. تابع $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که با دستور $f(x,y)=x^2$ تعریف شده است. بدین ترتیب نقاط روی نمودار سه‌تایی‌های به شکل $(x,y,z)=(x,y,x^2)$ هستند. مقدار z فقط به مؤلفهٔ اول، یعنی x، وابسته است. شکل ۲ نمودار این تابع را نشان می‌دهد. توجه کنید که اگر سهمی $z=x^2$ در صفحه xz را در امتداد محور y در $\mathbb{R}^3$ حرکت دهیم نمودار f حاصل می‌شود.

مثال ۴. این بار تابع درجه دوی دیگری به شکل $f(x,y)=x^2-y^2$ در نظر می‌گیریم. نمودار از نقاط به صورت $(x,y,z)=(x,y,x^2-y^2)$ تشکیل شده است. بالا سر محور x، یعنی برای $y=0$، سهمی $z=x^2$ به عنوان بخشی از نمودار ظاهر می‌شود. بالا سر محور y، یعنی وقتی $x=0$، سهمی وارونهٔ $z=-y^2$ به عنوان بخش دیگری از نمودار مشاهده می‌گردد. برای تجسم کامل نمودار می‌توان مثلاً به صورت زیر عمل کرد. به‌ازای هر $y=c$ ثابت، بخشی از نمودار که بالاسر خط راست $y=c$ قرار دارد در نظر می‌گیریم و با کنار هم چیدن این بخش‌ها شکل کامل نمودار را به‌دست می‌آوریم. بالاسر این خط داریم $z=x^2-c^2$ که یک سهمی است. رأس این سهمی در نقطه $(0,c,-c^2)$ قرار دارد ولی شکل هندسی آن ثابت است. وقتی $|c|$ بزرگ می‌شود این سهمی، با حفظ شکل رو به پایین حرکت می‌کند به طوری که رأس آن همواره روی سهمی $z=-y^2$ تکیه دارد.

مثال‌های بالا نشان می‌دهد نمودار تابع‌های درجه دوم دو متغیری از تنوع بیشتری نسبت به تابع‌های درجه دوم یک متغیری برخوردار است.

(۱۵ — ۲) تصویر. در حالت $m=n$ و همچنین در حالت $n=1$، $m>1$، روش بررسی تصویر که در زیر می‌آید بسیاری اوقات روشی مؤثر برای درک عملکرد یک تابع است. به خصوص وقتی $n=2,3$، این روش کمک بصری قابل توجهی است. در این روش دو نسخه از $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^m$ در نظر

می‌گیریم. یکی به عنوان فضای مبدأ (دامنه) و دیگری به عنوان فضای مقصد (برد)، و آنگاه تصویر مجموعه‌های گوناگون در فضای مبدأ را تحت اثر f در فضای مقصد مطالعه می‌کنیم. چنانچه مجموعه‌های مناسبی در فضای مبدأ در نظر گرفته شوند (و این برای تابع‌های گوناگون متفاوت خواهد بود)، برداشت سودمندی از عملکرد تابع حاصل می‌شود.

مثال ۵. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$$

نقاط فضای مقصد (برد) را به (u,v) نمایش می‌دهیم، پس:

$$u = x\cos y \quad , \quad v = x\sin y$$

هدف ما بررسی اثر هندسی f بر شکل مجموعه‌های مناسبی در صفحه xy است، یعنی برای مجموعهٔ داده شدهٔ S در صفحه xy، می‌خواهیم شکل $f(S)$ که زیرمجموعه‌ای از صفحهٔ uv است پیدا کنیم. کلید موفقیت این روش معمولاً انتخاب مناسب مجموعه در دامنه است. وقتی شکل خاصی به ذهن نرسد، معمولاً از ساده‌ترین اشکال شروع می‌کنیم. ساده‌ترین زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^۲$ یک تک نقطه‌ای است ولی چون هر تک نقطه به یک تک نقطه نگاشته می‌شود، اطلاع چندانی از این بررسی حاصل نمی‌شود. پس از نقطه، شاید ساده‌ترین مجموعه‌ها خطوط راست باشند. در این مثال اثر f را بر خطوط راست قائم $x = a$ و خطوط راست افقی $y = b$ بررسی می‌کنیم. برای a داده شده تصویر خط راست $x = a$ عبارت است از زوج‌های مرتب (u,v) که:

$$u = a\cos y \quad , \quad v = a\sin y \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

اگر a ثابت باشد و y در $\mathbb{R}$ مقدار بگیرد، نقطهٔ (u,v) دایرهٔ شعاع $|a|$ را می‌پیماید. از آنجا که $\cos y$ و $\sin y$ هر یک دورهٔ تناوب ۲π دارند، خط راست $x = a$، تحت اثر f، بی‌نهایت بار دایرهٔ شعاع $|a|$ را

می‌پیماید. ضمناً برای $\pm a$، دو خط $x = a$ و $x = -a$ هر دو بر این دایرهٔ شعاع $|a|$ نگاشته می‌شوند. در حالت $a = ۰$، تمام خط $x = ۰$ (محور y) به مبدأ مختصات در صفحه uv فرستاده می‌شود (شکل ۵).

حال به بررسی اثر f روی خطوط افقی $y = b$ می‌پردازیم. تصویر نقطهٔ (x, b) نقطه (u, v) به صورت زیر است:

$$u = x \cos b \quad , \quad v = x \sin b \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

برای b ثابت، نقطهٔ (u, v) روی خط راست $(\sin b)u - (\cos b)v = ۰$ در صفحهٔ uv قرار دارد و با تغییر x کلیه نقاط روی این خط به‌دست می‌آیند. این یک خط راست گذرا از مبدأ صفحهٔ uv با ضریب زاویه $\tan b$ است (وقتی b به شکل $\frac{\pi}{۲} + k\pi$ باشد، محور v حاصل می‌شود) (شکل ٦).

حال تصویر مستطیل به صورت $a_۱ \leq x \leq a_۲$، $b_۱ \leq y \leq b_۲$ را در تحت اثر f پیدا می‌کنیم. تصویر باید در حلقهٔ بین دو دایرهٔ شعاع‌های $|a_۱|$ و $|a_۲|$ حول مبدأ صفحه uv قرار گیرد. از سویی دیگر تصویر باید محصور به دو خط راست گذرا از مبدأ با ضریب زاویه‌های $\tan b_۱$ و $\tan b_۲$ باشد، پس نوعاً تصویری مانند شکل ۷ به‌دست خواهد آمد.

به عنوان نمونه دیگر، تصویر شکل H مانند متشکل از دو خط راست $x = \pm ۱$ و پاره‌خط $-۱ \leq x \leq ۱$، $y = ۰$، عبارت است از دایرهٔ شعاع واحد حول $\underline{o}$ در صفحه uv به انضمام قطر $-۱ \leq u \leq ۱$، $v = ۰$، زیرا که هر دو خط راست $x = \pm ۱$ به یک دایره نگاشته می‌شوند.

(۱۵—۳) مجموعهٔ تراز. در بررسی تابع‌های خطی و مستوی به مجموعه‌های تراز برخوردیم. به طور کلی برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، به‌ازای هر $c \in \mathbb{R}^m$، مجموعهٔ تراز منسوب به c عبارت است از:

$$f^{-۱}(c) = \{x \in S \mid f(x) = c\} \qquad (۴)$$

وقتی f یک تابع خطی یا مستوی باشد. دیدیم که مجموعه‌های ترازِ ناتهی همه همبعد و موازی هستند. در مورد تابع‌های غیرخطی، تنوع وافری می‌تواند حکمفرما باشد ولی خواهیم دید که رویهمرفته

بررسی نظام مجموعه‌های تراز راهگشای درک رفتار یک تابع است. در بحث آینده تابع‌های گوناگونی را از این دیدگاه مطالعه خواهیم کرد. لازم به ذکر است که بررسی مجموعه‌های تراز در بسیاری مسائل عملی نیز معمول است. مثلاً در نقشه‌های هواشناسی گاهی نقاط همدما (در یک ساعت معین روز) با رسم منحنی‌هایی که هر یک مشخص‌کننده یک دمای خاص است نمایش داده می‌شوند، در نقشه‌های جغرافیای طبیعی نقاط هم ارتفاع از سطح دریا روی یک منحنی نشان داده می‌شوند، و در نقشهٔ پوشش ماهواره‌ها از سطح زمین، نقاطی که قدرت دریافت سیگنال ماهواره در آنها برابر است با یک منحنی به هم وصل می‌شوند. این بحث را با ذکر یک نکتهٔ کلی به پایان می‌بریم.

برای تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $f = (f_۱, \ldots, f_m)$، برای $c \in \mathbb{R}^m$ داده شده داریم $c = (c_۱, \ldots, c_m)$ و:

$$\begin{aligned} f^{-۱}(c) &= \{x \in S \mid f(x) = c\} \\ &= \{x \in S \mid f_۱(x) = c_۱, \ldots, f_m(x) = c_m\} \\ &= \{x \in S \mid f_۱(x) = c_۱\} \cap \cdots \cap \{x \in S \mid f_m(x) = c_m\} \end{aligned}$$

پس:

$$f^{-۱}(c) = f_۱^{-۱}(c_۱) \cap \cdots \cap f_m^{-۱}(c_m) \qquad (۵)$$

یعنی مجموعهٔ تراز منسوب به c برابر اشتراک مجموعه‌های تراز تابع‌های $f_۱, \ldots, f_m$، به ترتیب منسوب به $c_۱, \ldots, c_m$ می‌باشد.