خم‌های هموار در $I\!R^n$

اکنون به بررسی خم‌های هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ می‌پردازیم. روشن است که برای یک خم در $\mathbb{R}^3$ امکان خمیدن و تابیدن بیشتری وجود دارد تا برای خم مسطح. اگر مانند سابق یک نیم‌خط را به عنوان جهت مرجع تعریف کنیم، هر مقدار θ به جای این که یک نیم‌خط منحصر بفرد تعریف کند، یک مخروط در فضا در تعیین خواهد کرد که هر مولد این مخروط زاویهٔ θ با محور مخروط می‌سازد (شکل ۱، الف). همچنین، هرچند که مماس واحد $\vec{T}$ در جهت حرکت

(الف) (ب)

شکل ۱

برای خم هموار فضایی معنی دارد (طبق معمول $\frac{1}{|\gamma'(t)|}\gamma'(t)$، یا $\frac{d\vec{r}}{ds}$)، ولی برای بردار قائم واحد بی‌نهایت نامزد وجود دارد که در یک صفحهٔ عمود بر تصویر خم قرار می‌گیرند. آیا می‌توان $\vec{N}$ مشخصی را از این میان انتخاب کرد؟

چون $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = 1$ برای هر s، با مشتق‌گیری نسبت به s و استفاده از فرمول (۷) بخش (۱۲) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T} \qquad \text{یا} \qquad \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0 \tag{1}$$

دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

<u>حالت ۱: $\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$</u> در این حالت $\kappa(s)$ را همانند (۵) بخش (۱۳) برابر صفر تعریف می‌کنیم.

<u>حالت ۲: $\frac{d\vec{T}}{ds} \neq 0$</u> در این حالت $\frac{d\vec{T}}{ds}$ جهتی مشخص عمود بر $\vec{T}$ مشخص می‌کند. تعریف می‌کنیم:

$$\kappa(s) = |\frac{d\vec{T}}{ds}| \quad , \quad \vec{N} = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\vec{T}}{ds} \tag{2}$$

بدین ترتیب برای یک خم هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^{۳}$، همواره $\kappa(s) \geq ۰$. در هر نقطه که $\kappa(s) \neq ۰$، قائم واحدی $\vec{N}$ از میان قائم‌های واحد ممکن مشخص کرده‌ایم. از این پس فقط به نقاطی که در آن $\kappa(s) \neq ۰$ توجه می‌کنیم (حالت ۲ بالا). برای تکمیل کنج متحرک، یا دستگاه مختصات متحرک وابسته به γ در این حالت، بردار واحد سومی $\vec{B}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \tag{۳}$$

چون $\vec{B}$ بر $\vec{T}$ عمود است، $\vec{B}$ نیز در صفحهٔ عمود بر خم در نقطهٔ $\gamma(s)$ قرار دارد. گاهی $\vec{N}$ را قائم واحد اول (یا قائم واحد اصلی)، و $\vec{B}$ را قائم واحد دوم می‌نامند. به تبعیت از حالت دوبعدی، آهنگ تغییرات $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ نسبت به s را بررسی می‌کنیم، با این امید که کمیت‌هایی که به‌دست می‌آیند گویای شکل کامل تصویر خم باشند. شکل کلی باید چنین باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = a_{۱۱}\vec{T} + a_{۱۲}\vec{N} + a_{۱۳}\vec{B} \\[2ex] \dfrac{d\vec{N}}{ds} = a_{۲۱}\vec{T} + a_{۲۲}\vec{N} + a_{۲۳}\vec{B} \\[2ex] \dfrac{d\vec{B}}{ds} = a_{۳۱}\vec{T} + a_{۳۲}\vec{N} + a_{۳۳}\vec{B} \end{cases} \tag{۴}$$

که در آن a_{ij} ها تابع‌هایی نسبت به s هستند. تاکنون طبق تعریف داریم $a_{۱۱} = a_{۱۳} = ۰$ و $a_{۱۲}(s) = \kappa(s)$. به بررسی شش ضریب ردیف‌های دوم و سوم می‌پردازیم. اگر از $\vec{N}(s) \cdot \vec{N}(s) \equiv ۱$ و $\vec{B}(s) \cdot \vec{B}(s) \equiv ۱$ نسبت به s مشتق بگیریم نتیجه می‌شود که $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} = ۰$ و $\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{B} = ۰$. نتیجه این که $a_{۲۲} = ۰$ و $a_{۳۳} = ۰$ (ضرب داخلی سطر دوم را با $\vec{N}$ و ضرب داخلی سطر سوم را با $\vec{B}$ در نظر بگیرید). همچنین از $\vec{T}(s) \cdot \vec{B}(s) \equiv ۰$، با مشتق‌گیری نسبت به s نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{B} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = ۰$$

$$a_{۱۳} + a_{۳۱} = ۰$$

ولی $a_{۱۳} = ۰$، پس $a_{۳۱} = ۰$. بدین ترتیب، علاوه بر دو ضریب سطر اول، ضرایب $a_{۲۲}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۳}$ نیز صفر هستند. حال با مشتق‌گیری از $\vec{T} \cdot \vec{N} \equiv ۰$ و $\vec{N} \cdot \vec{B} \equiv ۰$ به روشی مشابه بالا نتیجه می‌گیریم

که $a_{12} + a_{21} = 0$ و $a_{23} + a_{32} = 0$. چون $a_{12} = \kappa$ (طبق تعریف)، داریم $a_{21} = -\kappa$. ضریب تابعی a_{23} را به τ نمایش می‌دهیم و تاب می‌نامیم. پس:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = & & +\kappa\vec{N} & \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} = & -\kappa\vec{T} & & +\tau\vec{B} \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds} = & & -\tau\vec{N} & \end{cases} \tag{۵}$$

لازم به تأکید است تعریف $\vec{N}$، $\vec{B}$ و τ و برقراری سطرهای دوم و سطرهای سوم (۵) وابسته به فرض $\kappa \neq 0$ است. یک خم هموار در $\mathbb{R}^3$ که در سراسر آن $\kappa \neq 0$، خم فرنه خوانده می‌شود. کنج متحرک $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ یک کنج فرنه و روابط (۵) معادلات فرنه نامگذاری شده‌اند.

شهود ما از κ تا حدی مشابه حالت دو بعدی تأمین می‌شود، κ ضریب $\vec{N}$در رابطهٔ آهنگ تغییر $\vec{T}$ نسبت به s می‌باشد. τ چه اهمیت هندسی دارد که "تاب" نام گرفته است؟ در زیر می‌بینیم که τ شاخص "تمایل" یک خم فضایی به خروج از صفحه مسطح است.

(۴–۴) گزاره برای خم فرنه $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$، $\tau \equiv 0$ اگر و تنها اگر تصویر γ به تمامی در یک صفحه قرار داشته باشد.

اثبات فرض می‌کنیم γ برحسب طول پرمایش شده است (که می‌دانیم همواره می‌توان خم را با حفظ جهت نسبت به طول پرمایش کرد). نقطه مرجع $\gamma(s_\circ)$ در نظر بگیرید و تعریف کنید:

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(s) = (\gamma(s) - \gamma(s_\circ)) \cdot \vec{B}(s)$$

داریم:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \gamma'(s) \cdot \vec{B}(s) + (\gamma(s) - \gamma(s_\circ)) \cdot \tfrac{d\vec{B}}{ds} \\ &= \vec{T}(s) \cdot \vec{B}(s) + (-\tau)(\gamma(s) - \gamma(s_\circ)) \cdot \vec{N} \\ &= -\tau(\gamma(s) - \gamma(s_\circ)) \cdot \vec{N} \end{aligned}$$

اگر $\tau(s) \equiv 0$، نتیجه می‌شود که $f'(s) \equiv 0$، پس $f(s)$ ثابت است و

$$f(s) = f(s_\circ) = 0$$

ضمناً $\tau(s) \equiv 0$ از سطر سوم معادلات فرنه نتیجه می‌دهد که $B(s)$ نیز ثابت و همواره برابر $B(s_0)$ است. پس بردار واصل از $\gamma(s_0)$ به هر نقطهٔ دیگر تصویر خم، $\gamma(s)$، هموار در صفحه گذرا از $\gamma(s_0)$ و عمود بر $B(s_0)$ قرار دارد.

بالعکس اگر $\gamma(s)$ همواره در یک صفحه قرار داشته باشد، $T(s) = \gamma'(s)$ خمی در همان صفحه ترسیم می‌کند، پس $\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{T}}{ds}$ نیز در همان صفحه است. نتیجه این که $\vec{B}$ باید ثابت باشد، $\frac{d\vec{B}}{ds} \equiv 0$ و $\tau \equiv 0$. ■

(۲–۱۴) صفحه بوسان فرض کنید $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم فرنه باشد. در این صورت در هر نقطه بردار $\vec{N}$ تعریف شده است. زوج متعامد $(\vec{T}, \vec{N})$ یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ ایجاد می‌کند. این صفحه را صفحه بوسان γ در نقطه مربوط می‌نامند. به تعابیر مختلف می‌توان نشان داد این صفحه "نزدیکترین" صفحه به تصویر خم است. در واقع دیدیم که شرط لازم و کافی برای $\tau \equiv 0$ این است که تصویر γ به تمامی در صفحهٔ بوسان بماند. هر صفحهٔ شامل امتداد $\vec{T}(t)$ را می‌توان صفحه‌ای مماس بر تصویر γ در نقطه $\gamma(t)$ تلقی کرد. از بین این صفحات، صفحه بوسان به مفهومی که در آینده خواهیم دید "مماس‌ترین" این صفحه‌هاست. تعبیر دیگری از صفحهٔ بوسان به صورت زیر به‌دست می آید. $t_0 \in I$ را تثبیت کنید و t_1 و t_2 دو مقدار دیگر در I بگیرید. سه نقطهٔ $\gamma(t_0)$، $\gamma(t_1)$ و $\gamma(t_2)$ معمولاً یک صفحه پدید می آورند. وقتی $t_1 \longrightarrow t_0$ و $t_2 \longrightarrow t_0$، می‌توان نشان داد که این صفحه به صفحه بوسان میل می‌کند. تعبیر فیزیکی زیر نیز از صفحهٔ بوسان قابل توجه است. بردار شتاب $\vec{a}$ را می‌توان همانگونه که در حالت دو بعدی دیدیم در راستاهای تعیین شده توسط $\vec{T}$ و $\vec{N}$ تجزیه کرد:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}\vec{T}) \\ &= (\frac{d^2 s}{dt^2})\vec{T} + (\frac{ds}{dt})(\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt})\end{aligned}$$

پس

$$\vec{a} = (\frac{d^2 s}{dt^2})\vec{T} + \kappa(\frac{ds}{dt})^2\vec{N} \tag{6}$$

یعنی $\vec{a}$ همواره در صفحهٔ بوسان قرار می‌گیرد. بدین ترتیب برای هر حرکت فیزیکی ممکن روی تصویر خم γ بردار شتاب همواره در صفحهٔ بوسان می‌ماند.

(۱۴—۳) قضیهٔ اساسی خم‌ها به شیوه‌ای کاملاً مشابه اثبات قضیهٔ اساسی خم‌ها در $\mathbb{R}^2$، می‌توان نشان داد که هرگاه $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ دو خم فرنه پرمایش شده برحسب طول باشند با انحنا و تاب به ترتیب (κ_1, τ_1) و (κ_2, τ_2) به طوری که به‌ازای هر $s \in I$ داشته باشیم $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$ و $\tau_1(s) = \tau_2(s)$، آنگاه یک حرکت اقلیدسی در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که تصویر γ_1 و γ_2 را بر هم منطبق می‌کند. مقصود از یک حرکت اقلیدسی در اینجا نیز ترکیب انتقال و دوران است. اما مقصود از دوران در $\mathbb{R}^3$ چیست؟ دوران همواره به مفهوم چرخش $\mathbb{R}^3$ با یک زاویهٔ ثابت حول یک محور ثابت است. بدین ترتیب در دوران یک خط راست (محور دوران) نقطه به نقطه ساکن می‌ماند و زاویه‌ای φ وجود دارد که هر صفحهٔ عمود بر این محور روی خود به اندازهٔ زاویهٔ φ حول نقطه تقاطع با محور گردش می‌کند. در اثبات قضیهٔ اساسی پس از آن که یک نقطهٔ تصویر خم β را به نقطهٔ متناظر روی خم α منتقل می‌کنیم، باید کنج فرنهٔ β در آن نقطه را نیز بر کنج فرنهٔ α در همان نقطه منطبق کنیم. در واقع قضیه‌ای در هندسه سه بعدی هست که طبق آن می‌توان هر سه‌تایی متعامد واحد راستگرد ساطع از یک نقطه را به هر سه‌تایی متعامد راستگرد دیگر در آن نقطه با یک دوران به صورت ذکر شده منطبق کرد. نکتهٔ دیگری که در اینجا شایان توجه است این است که در اثر چنین دورانی مقادیر κ و τ تغییر نمی‌کنند. این موضوع نیاز به اثبات دارد. با فرض این نکات بقیهٔ اثبات عیناً مانند حالت دوبعدی است با این تفاوت که به جای تابع $f(s) = \vec{T}_1(s) \cdot \vec{T}_2(s) + \vec{N}_1(s) + \vec{N}_2(s)$ در ۱۴—۱، از تابع $f(s) = \vec{T}_1(s) \cdot \vec{T}_2(s) + \vec{N}_1(s) + \vec{N}_2(s) + \vec{B}_1(s) \cdot \vec{B}_2(s)$ استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب برای خم‌های فرنه در $\mathbb{R}^3$، κ و τ شکل تصویر خم را به طور کامل توصیف می‌کنند.

(۱۴—۴) به عنوان یک مثال، انحنا و خم مارپیچ دوار را که در بخش ۱۲ معرفی کردیم محاسبه می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که مارپیچ دوار $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ تعریف می‌شود که در آن $a > 0$ و b اعداد حقیقی داده شده‌اند. داریم $\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$، پس $\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. بدین ترتیب در این مثال پارامتر طول، $s = \sqrt{a^2 + b^2}\ t$ به سادگی

به‌دست می‌آید و می‌توان خم را برحسب s پرمایش کرد:

$$\widetilde{\gamma}\,(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}s)$$

$$\vec{T}(s) = \frac{d\,\widetilde{\gamma}}{ds} = \frac{۱}{\sqrt{a^۲+b^۲}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, b)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{۱}{a^۲+b^۲}(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, ۰)$$

پس

$$\kappa = \frac{a}{a^۲+b^۲} \qquad , \qquad \vec{N} = (-\cos\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, ۰)$$

بنابراین وقتی $a > ۰$، یک خم فرنه به‌دست می‌آید. حال به محاسبهٔ $\vec{B}$ و τ می‌پردازیم:

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} = \frac{۱}{\sqrt{a^۲+b^۲}}(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, a)$$

برای محاسبهٔ τ، از $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{b}{a^۲+b^۲}(\cos\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, \sin\frac{s}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, ۰)$$

پس

$$\tau = \frac{b}{a^۲+b^۲}$$

توجه کنید که τ با b هم علامت است. وقتی $\tau > ۰$، جهت γ به طرف بالا، و وقتی $\tau < ۰$ جهت γ به سوی پایین است. برای $b = ۰$، تصویر خم γ در صفحه xy می‌ماند و $\tau = ۰$. به طور کلی، برای خم‌های فرنه، می‌توان ثابت کرد که $\tau > ۰$ به مفهوم تابیدن خم خارج از صفحهٔ بوسان در طرف $\vec{B}$ است و $\tau < ۰$ تابیدن در طرف مقابل $\vec{B}$ را نشان می‌دهد.

(۵–۱۴) <u>محاسبهٔ κ و τ در حالت کلی</u> در مثال بالا محاسبه پارامتر طول برحسب پارامتری که خم بر حسب آن ارائه شده بود آسان بود و توانستیم از آغاز خم را برحسب s پرمایش کنیم. این یک وضعیت استثنایی است. بسیاری اوقات نمی‌توان عبارت‌های ساده و قابل استفاده‌ای برای بازپرمایش خم برحسب طول به‌دست آورد. در حالت کلی باید با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتق‌گیری نسبت به

پارامتر داده شده به نتایج مورد نظر رسید. بخشی از این کار در فرمول (۶) انجام شده است. اگر ضرب خارجی دو طرف (۱) را با بردار سرعت $\gamma'(t)$ محاسبه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (\frac{d^{۲}s}{dt^{۲}})\gamma'(t) \times \vec{T} + \kappa(\frac{ds}{dt})^{۲}\gamma'(t) \times \vec{N}$$

$\gamma'(t)$ و $\vec{T}$ همراستا هستند، پس جمله اول طرف راست صفر است. از طرفی دیگر

$$\gamma'(t) \times \vec{N} = (\frac{ds}{dt})\vec{T} \times \vec{N} = (\frac{ds}{ds})\vec{B}$$

پس

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \kappa(\frac{ds}{dt})^{۳}\vec{B} \qquad (۷)$$

و بالاخره با در نظر گرفتن طول بردار در دو طرف داریم

$$\kappa = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^{۳}} \qquad (۸)$$

این فرمول انحنا برحسب پارامتر دلخواه t است.

برای به‌دست آوردن فرمولی برای τ، از (۱) نسبت به t مشتق می‌گیریم که در آن فقط محاسبهٔ ضریب $\vec{B}$ بعداً موردنیاز قرار خواهد گرفت:

$$\gamma'''(t) = (\ )\vec{T} + (\ )\vec{N} + \kappa(\frac{ds}{dt})^{۳}\tau\vec{B}$$

از محاسبهٔ ضرب داخلی دو طرف با $\vec{B}$ نتیجه می‌شود

$$\vec{B} \cdot \gamma'''(t) = \kappa(\frac{ds}{dt})^{۳}\tau$$

و با جایگزینی از (۸) داریم:

$$\tau = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^{۲}} \qquad (۹)$$

ضمناً این فرمول وابستگی τ به مشتق سوم γ را نشان می‌دهد. این موضوع نباید تعجب‌آور باشد زیرا که تعریف $\vec{N}$، مشتق دوم γ را می‌طلبید و τ در معادلات فرنه از مشتق‌گیری $\vec{N}$ به‌دست می‌آید