خم‌های هموار در $\mathbb{R}^n$ (۲)

همهٔ ما تصویری ذهنی از شدت یا ضعف "خمیدن" یا "انحنای" یک خم هندسی (تصویر یک خم پارامتری داریم. معمولاً تصور ما از انحنا، شدت انحراف یک خم از "خط راست بودن" است. مثلاً انحنای یک دایره با شعاع بزرگ را کوچکتر از انحنای یک دایره با شعاع کوچک می‌دانیم. موجوداتی که روی یک کرهٔ با شعاع بزرگ زندگی کنند دیرتر از موجوداتی که روی یک کره با شعاع کوچک زندگی کنند به کروی بودن زیستگاه خود پی می‌برند. معادلاً می‌توان گفت که پیمودن مسافتی روی دایره‌ای کوچک، در مقایسه با پیمودن همان مسافت روی دایرهٔ بزرگ، متحرک را از خط مماس در نقطهٔ آغاز حرکت دورتر می‌کند (شکل ۱، الف و ب). بدین ترتیب انتظار داریم که تعریف ریاضی انحنا به گونه‌ای باشد که در شکل ۱، ج، انحنا در نقطه P بزرگتر از انحنا در نقطهٔ Q باشد.

الف ب ج

شکل ۱

(۱۳–۱) <u>خم‌های مسطح</u> با این پیش درآمد، برای ارائه تعریف دقیق ریاضی از انحنا، به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست بحث ما محدود به خم‌های $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ خواهد بود. نیم‌خطی را به عنوان یک جهت مرجع اختیار می‌کنیم، مثلاً نیم‌خط افقی به طرف راست. برای خم هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$، به‌ازای هر $t \in I$، $\gamma'(t) \neq 0$، بنابراین جهت مثبت خط مماس (نیم‌خط تعیین شده توسط جهت بردار سرعت) نیز مشخص است. حال زاویهٔ θ را به‌ازای هر t، برابر زاویهٔ از نیم‌خط مرجع به نیم‌خط مثبت مماس تعریف می‌کنیم (واحد اندازهٔ زاویه را رادیان می‌گیریم). طبق صحبتی که شد، انحنا باید آهنگ تغییر θ نسبت به مسافت طی شده روی خم باشد، یعنی

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \qquad (1)$$

(κ: حرف یونانی "کاپا"، معمولاً برای انحنا به کار گرفته می‌شود.) تعریف دقیق θ را باید (ضریب زاویهٔ خط مماس) $arc\tan$ گرفت. دو شکل در اینجا ظاهر می‌شود:

شکل ۲

۱) ضریب زاویه مربوط به خط مماس است که با یک بار مشتق‌گیری از خم γ به‌دست می‌آید، بنابراین مشتق‌گیری مجدد، $\frac{d\theta}{ds}$،مستلزم این است که خم اولیه دوبار مشتق‌پذیر باشد.

۲) وقتی خط مماس در وضعیت قائم قرار گیرد، ضریب زاویه تعریف نشده است (یا ∞ است) هر چند که به نظر می‌رسد θ قابل تعریف شدن باشد.

در مورد (۱)، از این پس برای بحث در مورد انحنا فرض می‌کنیم که γ دوبار مشتق‌پذیر باشد. در مورد (۲)، اشکال تعریف θ برطرف شدنی است و در تعریف معادلی که بعداً از انحنا ارائه خواهد شد، به آن اشاره خواهیم کرد. فعلاً با همین تعریف (۱)، وضعیت خط راست و دایره را بررسی می‌کنیم:

مثال ۱. برای خط راست در صفحه، θ، ثابت است، پس $\frac{d\theta}{ds} = 0$، بین انحنای خط راست، همچنان که انتظار داریم، صفر است.

شکل ۳

مثال ۲. دایره‌ای به شعاع R در نظر بگیرید که در جهت مثلثاتی پرمایش شده است (شکل ۴).

شکل ۴

داریم

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\alpha = \frac{s}{R} \quad \text{(برحسب رادیان)}$$

پس $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$. بدین ترتیب همان گونه که انتظار می‌رفت، انحنا متناسب با معکوس شعاع دایره است.

در مثال بالا، اگر دایره در جهت عقربهٔ ساعت پرمایش شود، خواهیم داشت $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ و $\alpha = -\frac{s}{R}$ (α را همواره در جهت مثلثاتی مثبت، و s را در جهت حرکت مثبت فرض می‌کنیم)، پس

$-\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = \kappa$. بعضی کتاب‌ها از قدرمطلق $\frac{d\theta}{ds}$ به عنوان انحنا صحبت می‌کنند، که در آن صورت علامت منفی ظاهر نمی‌شود، ولی این روش باعث از دست رفتن پاره‌ای اطلاعات مهم می‌شود. در تعریف ما، صعود θ در جهت حرکت به منزلهٔ انحنای مثبت و نزول آن به معنای انحنای منفی است.

شکل ۵

به زودی به مفهوم فیزیکی این علامت اشاره خواهیم کرد.

با تعریف (۱) می‌توان به محاسبه انحنای انواع خم‌ها اقدام کرد، ولی در اینجا ترجیح می‌دهیم تعریف معادلی از انحنا ارائه کنیم که قابلیت تعمیم به خم‌های واقع در ابعاد بالاتر را نیز دارد. خم هموار دوبار مشتق‌پذیر $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. مماس واحد در جهت حرکت به‌ازای هر $t \in I$ قابل تعریف کردن است:

$$\vec{T} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\gamma'(t) \quad \text{(هموار بودن موجب می‌شود که } \gamma'(t) \neq 0) \tag{۲}$$

ضمناً بنابر (۵) بخش قبل، داریم:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{۳}$$

که s مقدار تابع طول در جهت حرکت است. چون $\vec{T}$ یک بردار واحد است، می‌توان مؤلفه‌های افقی و قائم آن را به ترتیب به صورت کسینوس و سینوس زاویهٔ θ نوشت:

$$\vec{T} = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{۴}$$

اگر γ دوبار مشتق‌پذیر باشد، می‌توان ثابت کرد (ولی اثبات دقیق از حوصلهٔ این درس خارج است) که θ را می‌توان در طول خم به صورت تابعی مشتق‌پذیر از t (یا s) در نظر گرفت. نکتهٔ قابل توجه در مورد چنین تابع θ این که معمولاً نمی‌توان برای یک خم پیچیده، مقدار θ را به بازهٔ خاصی به طول 2π محدود کرد. به شکل ٦، الف، توجه کنید:

الف　　　　ب

شکل ٦

در نقطه A می‌توانیم θ را برابر ۰ یا هر مضرب دیگر ۲π انتخاب کنیم، ولی پس از این انتخاب، وقتی θ به طور پیوسته در طول خم تغییر کند، مقدار آن در نقاط دیگر با انتخاب آن در A تحمیل می‌شود. مثلاً اگر θ را در A برابر ۰ بگیریم، مقدار θ در B برابر $\frac{\pi}{۲}$، در C برابر π، در D برابر $\frac{۳\pi}{۲}$ و در E برابر ۲π خواهد شد. با این که توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس برای ۰ و ۲π یک مقدار دارند، و لیکن اگر θ به طور پیوسته تغییر کند، مقدار θ در A و در E برابر نخواهد بود، بلکه به اندازهٔ ۲π افزایش خواهد داشت که یک گردش کامل مماس واحد حول دایرهٔ مثلثاتی را نشان می‌دهد. در شکل ٦ ب، مماس‌های واحد در طول خم را به مبدأ مختصات منتقل کرده‌ایم؛ A'، B'، C'، D' و E' متناظر با A، B، C، D و E هستند. وقتی متحرک در طول خم از A به E حرکت کند، مماس واحد روی دایرهٔ واحد یک دور کامل دایرهٔ مثلثاتی را در جهت مثبت می‌پیماید و بدین ترتیب از A تا E مقدار θ به اندازهٔ ۲π افزایش می‌یابد.

به (۳) و (۴) باز می‌گردیم. $\vec{T}$ همواره طول ثابت واحد را دارد بنابراین آهنگ تغییر آن نسبت به s باید صرفاً خمیدن γ را مشخص کند، یعنی با انحنا رابطه داشته باشد. در واقع:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{ds} &= (-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \cos\frac{d\theta}{ds}) \\ &= \kappa(-\sin\theta, \cos\theta)\end{aligned}$$

با توجه به این که $\cos(\theta+\frac{\pi}{۲}) = -\sin\theta$ و $\sin(\theta+\frac{\pi}{۲}) = \cos\theta$، بردار $(-\sin\theta, \cos\theta)$ عمود بر $\vec{T}$ و چرخش یافته نسبت به آن به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی است. این بردار را به $\vec{N}$ نمایش می‌دهیم و قائم واحد γ می‌نامیم. توجه کنید که به‌ازای هر t، دو قائم واحد قرینه برای γ وجود دارد که $\vec{N}$ آن قائم است که از گردش $\vec{T}$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی به‌دست می‌آید. پس داریم:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N} \tag{۵}$$

زوج $(\vec{T}, \vec{N})$ و امتدادهای تعیین شده توسط آنها را به صورت یک دستگاه مختصات متحرک چسبیده به تصویر γ تجسم می‌کنیم $(\vec{T}, \vec{N})$ معمولاً کنج متحرک γ خوانده می‌شود. (۵) را می‌توان این گونه تعبیر کرد که κ آهنگ تغییر این دستگاه مختصات متحرک وابسته به خم است. ضمناً اگر از $\vec{N} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ نسبت به s مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} \tag{٦}$$

قبلاً اشاره کردیم که $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ متضمن دوبار مشتق‌گیری از γ است. از این رو رابطهٔ κ را با بردار شتاب $\vec{a} = \frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲}$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) \\ &= \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds}) = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}\vec{T}) \\ &= \frac{d^۲s}{dt^۲}\vec{T} + (\frac{ds}{dt})(\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds})\end{aligned}$$

پس

$$\vec{a} = (\frac{d^۲s}{dt^۲})\vec{T} + \kappa(\frac{ds}{dt})^۲\vec{N} \qquad (۷)$$

فرمول (۷) را می‌توان تجزیه بردار شتاب در راستای دستگاه مختصات متحرک وابسته به γ تعبیر کرد. توجه کنید که برای $\kappa > ۰$، مؤلفه $\vec{a}$ در جهت $\vec{N}$ مثبت و برای $\kappa < ۰$، مؤلفه $\vec{a}$ در جهت $\vec{N}$ منفی است. اگر مسیر حرکت را مسیر یک حرکت فیزیکی فرض کنیم، $\vec{a}$ و نیرو همجهت هستند و $\vec{a}$ باید همواره به سوی تقعر منحنی اشاره کند. این نکته با تعبیری که قبلاً از علامت κ ارائه کردیم سازگار است (شکل ۷).

شکل ۷

حال سؤال اساسی زیر را مطرح می‌کنیم: انحنا تا چه حد معرف شکل هندسی (تصویر) یک خم است؟ قضیه زیر پاسخی قاطع به این سؤال می‌دهد. در واقع برای خم‌های هموار، کمیت انحنا شکل منحنی را به طور کامل تعیین می‌کند، یعنی دو منحنی که در نقاط متناظر انحنای برابر داشته باشند با یک حرکت اقلیدسی در صفحه (انتقال + دوران) برهم قابل انطباقند.

(۱۳–۲) قضیهٔ اساسی خم‌ها فرض کنید $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ دو خم هموار پرمایش شده برحسب طول باشند. انحناهای α و β را به ترتیب به $\kappa_۱$ و $\kappa_۲$ نمایش می‌دهیم. اگر به‌ازای هر $s \in I$، داشته باشیم $\kappa_۱(s) = \kappa_۲(s)$، آنگاه می‌توان با یک حرکت اقلیدسی (انتقال + دوران) تصویر دو خم را برهم منطبق کرد.

<u>اثبات</u> یک نقطهٔ مرجع $s_\circ$ در I اختیار می‌کنیم. نخست انتقالی در صفحه انجام می‌دهیم که $\alpha(s_\circ)$ و $\beta(s_\circ)$ را برهم منطبق کند. "انتقال" به معنی تابعی $f(x,y)=(x,y)+(a,b)$ است که در آن (a,b) برداری ثابت (بردار انتقال) است. بدین ترتیب اگر $\alpha(s)=(\alpha_۱(s),\alpha_۲(s))$، $f(\alpha(s))=(\alpha_۱(s)+a,\alpha_۲(s)+b)$، و چون a و b ثابت هستند، $\vec{T}$، $\vec{N}$ و κ (که از مشتق‌گیری از α نسبت به s به‌دست می‌آیند) تغییر نمی‌کنند. بدین ترتیب می‌توان از اول فرض کرد که $\alpha(s_\circ)=\beta(s_\circ)$. حال کنج‌های متحرک وابسته به α و β را به ترتیب به $(\vec{T}_۱,\vec{N}_۱)$ و $(\vec{T}_۲,\vec{N}_۲)$ نمایش می‌دهیم. از آنجا که $(\vec{T}_۱,\vec{N}_۱)$ و $(\vec{T}_۲,\vec{N}_۲)$ هر دو راستگرد هستند، می‌توان با یک دوران به مرکز $\alpha(s_\circ)=\beta(s_\circ)$ فرض کرد $\vec{T}_۲(s_\circ)=\vec{T}_۱(s_\circ)$ و $\vec{N}_۲(s_\circ)=\vec{N}_۱(s_\circ)$. توجه کنید که دوران، زاویه θ را به مقداری ثابت تغییر می‌دهد، پس تابع‌های انحنا تغییر نخواهد کرد. بدین ترتیب می‌توان از آغاز فرض کرد که $\vec{T}_۲(s_\circ)=\vec{T}_۱(s_\circ)$ و $\vec{N}_۲(s_\circ)=\vec{N}_۱(s_\circ)$. حال تابع $\varphi: I\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(s)=\vec{T}_۱(s)\cdot\vec{T}_۲(s)+\vec{N}_۱(s)\cdot\vec{N}_۲(s)$$

مشتق‌گیری نسبت به s با استفاده از فرمول (۷) جلسه قبل و فرمول‌های (۵) و (۶) این جلسه نتیجه می‌دهد:

$$\varphi'(s)=\kappa_۱(s)\vec{N}_۱(s)\cdot\vec{T}_۲(s)+\kappa_۲(s)\vec{T}_۱(s)\cdot\vec{N}_۲(s)-\kappa_۱(s)\vec{T}_۱(s)\cdot\vec{N}_۲(s)-\kappa_۲(s)\vec{N}_۱(s)\cdot\vec{T}_۲(s)$$

از فرض قضیه، $\kappa_۱(s)=\kappa_۲(s)$ داریم $\varphi'(s)=\circ$ برای هر s، پس φ ثابت است. بنابراین:

$$\varphi(s)=\varphi(s_\circ)=\vec{T}_۱(s_\circ)\cdot\vec{T}_۲(s_\circ)+\vec{N}_۱(s_\circ)\cdot\vec{N}_۲(s_\circ) \qquad \text{برای هر } s$$

و چون به‌ازای $s_\circ$، دو کنج بر هم منطبقند، داریم $\varphi(s)=۲$ به‌ازای هر s. ولی بردارهای $\vec{T}_i$ و $\vec{N}_i$ بردارهای واحدند، بنابراین $\varphi(s)$ تنها در صورتی می‌تواند همواره برابر ۲ باشد که برای هر s داشته باشیم $\vec{T}_۱(s)=\vec{T}_۲(s)$ و $\vec{N}_۱(s)=\vec{N}_۲(s)$. رابطهٔ اول نتیجه می‌دهد که $\frac{d}{ds}(\alpha(s)-\beta(s))=\circ$ پس $\alpha(s)-\beta(s)$ ثابت است. ولی به‌ازای $s=s_\circ$، با انتقال فرض کردیم $\alpha(s_\circ)=\beta(s_\circ)$، پس $\alpha(s)-\beta(s)=\circ$ برای هر s، یعنی با انتقال و دوران انجام شده، دو خم کاملاً برهم منطبق شده‌اند. ■