# خم‌های هموار در $\mathbb{R}^n$ (۱)

مقصود از یک خم یا منحنی (پارامتری، پرمایش شده) در $\mathbb{R}^n$ تابعی $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ از یک بازهٔ $I \subset \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^n$ است. بسیاری اوقات می‌توان $I$ را یک بازهٔ زمانی تلقی کرد که در این صورت $\gamma(t)$ به مکان یک "ذره" در $\mathbb{R}^n$، در زمان $t$ تعبیر می‌شود. گاهی می‌نویسیم $\vec{\mathbf{r}} = \gamma(t)$ و $\vec{\mathbf{r}}$ را بردار مکان حرکت می‌نامیم. در نگاه اول ممکن است در نظر گرفتن یک "ذره" در $\mathbb{R}^n$، برای $n > ۳$، مصنوعی به نظر رسد، ولی به مثال زیر توجه کنید. اگر $k$ ذره مادی در $\mathbb{R}^۳$ تحت اثر جاذبهٔ متقابل همدیگر حرکت کنند، می‌توان به صورتی که شرح خواهیم داد تحول دستگاه فیزیکی را حرکت یک ذره مجازی در فضای $\mathbb{R}^{۳k}$ تصور کرد. مکان هر ذره در $\mathbb{R}^۳$ با سه مؤلفه حقیقی مشخص می‌شود. حال اگر این ذرات اول تا $k$ـ ام این سه مؤلفه را کنار هم قرار دهیم یک $۳k$ـ تایی به‌دست می‌آید که مکان هر $k$ ذره را توصیف می‌کند. بدین ترتیب به جای $k$ ذره در $\mathbb{R}^۳$ می‌توان یک ذره را در $\mathbb{R}^{۳k}$ در نظر گرفت. همچنان که در درس جلسه اول دیدیم این گونه هندسی‌سازی با ابعاد بالا می‌توان گاهی سودمند واقع شود.

برای خم $\gamma$ می‌توان مفاهیم "پیوستگی" و "حد" را مطرح ساخت. اگر $t_۰$ در بازهٔ تعریف قرار داشته باشد، $\gamma$ را در $t_۰$ پیوسته می‌نامیم در صورتی که برای هر $\varepsilon > ۰$، وجود داشته باشد $\delta > ۰$ که هرگاه $|t - t_۰| < \delta$ و $t$ در بازهٔ تعریف $\gamma$ باشد، داشته باشیم $|\gamma(t) - \gamma(t_۰)| < \varepsilon$. این تعریف در ظاهر عیناً مانند تعریف پیوستگی تابع‌های $I \longrightarrow \mathbb{R}$ است، تنها تفاوت این است که عبارت $|\gamma(t) - \gamma(t_۰)|$ در واقع طول تفاضل دو بردار (دو $n$ تایی) است. بدین ترتیب پیوستگی گویای این خاصیت است که بتوان با نزدیک کردن $t$ به $t_۰$، فاصله $\gamma(t)$ از $\gamma(t_۰)$ از مقدار از پیش ملحوظ شدهٔ $\varepsilon > ۰$ کوچکتر کرد. برای دریافتن ارتباط دقیق این تعریف با تعریف مأنوس پیوستگی تابع‌های $I \longrightarrow \mathbb{R}$، $\gamma(t)$ را به صورت مؤلفه‌ای می‌نویسیم:

$$\gamma(t) = (\gamma_۱(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

از آنجا که

$$|\gamma(t)-\gamma(t_\circ)| = \sqrt{(\gamma_۱(t)-\gamma_۱(t_\circ))^۲+\cdots+(\gamma_n(t)-\gamma_n(t_\circ))^۲}$$

نتیجه می‌شود که:

$$|\gamma_j(t)-\gamma_j(t_\circ)| \leq |\gamma(t)-\gamma(t_\circ)| \leq \sqrt{n}\max_{i=۱,\ldots,n}|\gamma_i(t)-\gamma_i(t_\circ)| \qquad (۱)$$

که نامساوی طرف چپ برای هر $j=۱,\ldots,n$ برقرار است. طرف چپ نامساوی (۱) نتیجه می‌دهد که هرگاه $\gamma$ در $t_\circ$ پیوسته باشد، هر $\gamma_j$ نیز در $t_\circ$ پیوسته است ($\gamma_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$). بالعکس از نیمه راست (۱) نتیجه می‌شود که اگر همهٔ $\gamma_i$ ها در $t_\circ$ پیوسته باشند (به مفهوم پیوستگی هر یک از $n$ تابع حقیقی $\gamma_i$)، آنگاه $\gamma$ نیز در $t_\circ$ پیوسته است. بین ترتیب می‌توان ادعا کرد که:

(۱۲—۱) شرط لازم و کافی برای پیوستگی $\gamma$ در $t_\circ$ این است که هر مؤلفه، $\gamma_i$، در $t_\circ$ پیوسته باشد.

به همین ترتیب می‌توان مفهوم "حد" را مطرح کرد. اگر $t_\circ$ یک نقطهٔ بازهٔ $I$ یا یک نقطه انتهایی آن باشد (در مورد باز، بسته، یا نیم باز بودن $I$ فرضی نکرده‌ایم)، می‌نویسیم:

$$\lim_{t\to t_\circ}\gamma(t) = L = (L_۱,\ldots,L_n) \in \mathbb{R}^n$$

در صورتی که برای هر $\varepsilon > \circ$، وجود داشته باشد $\delta > \circ$ که هرگاه $\circ < |t-t_\circ| < \delta$ و $t$ در بازهٔ تعریف $\gamma$ باشد، داشته باشیم $|\gamma(t)-L| < \varepsilon$. عیناً مانند حالت پیوستگی می‌توان ادعا کرد که:

(۱۲—۲) شرط لازم و کافی برای $\lim_{t\to t_\circ}\gamma(t) = L$ این است که به‌ازای هر $i=۱,\ldots,n$ داشته باشیم $\lim_{t\to t_\circ}\gamma_i(t) = L_i$. ■

اکنون می‌توانیم مفهوم مشتق‌پذیری $\gamma$ را مطرح کنیم که این نیز کاملاً مشابه حالت $I \longrightarrow \mathbb{R}$ است. $\gamma$ را در $t_\circ$ مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{h\to\circ}\frac{۱}{h}(\gamma(t+h)-\gamma(t))$$

درصورت وجود، این حد را مشتق $\gamma$ در $t$، یا بردار سرعت $\gamma$ در $t$، می‌نامیم و به $\gamma'(t)$ نمایش می‌دهیم. طبق ۳—۲، شرطی لازم و کافی برای مشتق‌پذیری $\gamma$ در $t$ این است که هر یک از $\gamma_۱,\ldots,\gamma_n$ در $t$

مشتق‌پذیر باشند، در این صورت:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \ldots, \gamma'_n(t))$$

تجسم مفهوم خم (پارامتری) و بردار سرعت به صورت مأنوس زیر است. معمولاً $\gamma$ را با تصویر آن، یعنی مجموعهٔ $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$ در $\mathbb{R}^n$، که در تعبیر فیزیکی، مسیر حرکت است، نمایش می‌دهند. در این صورت $\frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t))$ برداری همراستا با $\gamma(t+h) - \gamma(t)$ می‌شود. وقتی $h$ به صفر میل کند، راستای قاطع واصل بین $\gamma(t)$ و $\gamma(t+h)$ شهوداً به راستای "مماس" بر تصویر خم میل می‌کند. تعریف دقیقی از "مماس" در جلسات آینده ارائه خواهد شد. نسبت دادن کلمهٔ "سرعت" به $\gamma'(t)$ بدین سبب است که $\frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t))$ "جابجایی متوسط" متحرک $\gamma$ در بازهٔ زمانی $[0, h]$ است که در آن، هم فاصلهٔ مکانی $\gamma(t+h)$ از $\gamma(t)$ و هم جهت حرکت $\gamma(t)$ منظور شده است. وقتی $h \to 0$ این "جابجایی متوسط" به "جابجایی لحظه‌ای" متحرک در زمان $t$ میل می‌کند (در صورت وجود حد).

شکل ۱

لازم به تأکید است تصویر $\gamma$ را نباید با "نمودار $\gamma$" اشتباه کرد. نمودار $\gamma$ به صورت $\{(t, \gamma(t)) \mid t \in I\}$ تعریف می‌شود و برای ترسیم آن باید از فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ استفاده کرد، در حالی که تصویر $\gamma$ در $\mathbb{R}^n$ ترسیم می‌شود. در مورد توابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ما به ترسیم نمودار عادت کرده‌ایم و معمولاً توابع را از شکل نمودار آنها می‌شناسیم در حالی که تصویر یک تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، که یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، معمولاً چندان گویای رفتار تابع $f$ نیست. برای ابعاد بالاتر، رسم کردن نمودار یک بعد بیش از ترسیم تصویر می‌طلبد و کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. اکنون به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

**مثال ۱.** $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$، $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. اگر نقاط $\mathbb{R}^2$ را به $(x, y)$ نمایش دهیم، تصویر $\gamma$ از زوج‌های $(x, y)$ تشکیل می‌شود که $x = t^2$ و $y = t^3$. این مجموعه در شکل ۲ نمایش داده شده است.

شکل ۲

پیکان روی خم جهت صعود $t$ را نمایش می‌دهد. توجه کنید که $\gamma$ مشتق‌پذیر است و در واقع:

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$$

"تیزی" این خم به‌ازای $t = ۰$ ممکن است در نظر اول متناقض با مشتق‌پذیری $\gamma$ در $t = ۰$ بنماید، ولی در واقع تناقضی در میان نیست. در مورد نمودار، وجود "یک گوشه تیز" فقدان مشتق را می‌رساند ولی در مورد تصویر چنین نیست. اگر نمودار همین $\gamma$ را در $\mathbb{R}^۳$ رسم کنیم، نمودار کاملاً "هموار" به نظر می‌رسد، در شکل ۳ کوشش شده است نمودار $\gamma$، یعنی مجموعهٔ $\{(t, t^۲, t^۳) \mid t \in \mathbb{R}\}$ در فضای سه بعدی $(t, x, y)$ نمایش داده شود. برای تجسم بهتر، تصویر قائم این نمودار بر سه صفحه $(t, x)$، $(t, y)$ و $(x, y)$ در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند.

شکل ۳

شکل ۴

**مثال ۲.** $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۲$، $\gamma(t) = (t^۲ - ۱, t^۳ - t)$ را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ تصویر $\{(x, y) = (t^۲ - ۱, t^۳ - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ در سمت راست شکل ۵ نمایش داده شده است. در سمت راست، نمودار $\gamma$ ظاهر می‌شود.

شکل ۵

**مثال ۳.** خم فضایی $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ را به صورت $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ تعریف می‌کنیم که در آن $a$ و $b$ اعداد حقیقی داده شده هستند. این خم مارپیچ دوار نام دارد. تصویر خم، یعنی مجموعهٔ $\{(x, y, z) = (a \cos t, a \sin t, bt) \mid t \in \mathbb{R}\}$ روی استوانه‌ای بنا شده بر دایره $x^۲ + y^۲ = a^۲$ در صفحه $xy$ قرار دارد و با آهنگ ثابت $b$ در امتداد محور $z$ روی استوانه می‌پیچد (به شکل ٦).

شکل ٦

برای $b > ۰$، $z$ نسبت به $t$ صعودی و برای $b < ۰$، جهت $z$ نزولی است.

خم $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را هموار می‌نامیم اگر شرایط زیر فراهم باشند:

۱) $\gamma$ مشتق‌پذیر و $\gamma'$ پیوسته باشد.

۲) $\gamma'(t) \neq \underline{\circ}$ برای هر $t$ در $I$.

در مورد شرط دوم کمی توضیح لازم است. اگر به‌ازای $t_\circ$ داشته باشیم $\gamma'(t_\circ) = \underline{\circ}$، صفر شدن بردار سرعت به‌ازای $t_\circ$ نشان می‌دهد که در لحظهٔ $t_\circ$ جهت حرکت مشخصی برای ذره وجود ندارد. بنابراین بدون این که پیوستگی $\gamma'$ در $t_\circ$ نقض شود، جهت حرکت برای $t > t_\circ$ می‌تواند کاملاً متفاوت از جهت حرکت برای $t < t_\circ$ شود و نوعی "تیزی" در مسیر حرکت پدید آید. مثال ۱، به‌ازای $t = \circ$، از این نوع بود. به عنوان مثال شاید تعجب‌آورتری، به مثال ۴ توجه کنید:

**مثال ۴.** خم $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^۲, t^۲) & t \geq \circ \\ (-t^۲, t^۲) & t \leq \circ \end{cases}$$

می‌نویسیم $\gamma(t) = (\gamma_۱(t), \gamma_۲(t))$. $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ هر دو مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته‌اند.

شکل ۷

ولی تصویر $\gamma$ که در شکل ۸ نمایش داده شده است به‌ازای $t = \circ$ که $\gamma'(\circ) = \circ$ تغییر جهت می‌دهد. همین پدیده برای تابع‌های $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ نیز موجود است لیکن به این دلیل که در این حالت به مجموعهٔ تصویر توجه نمی‌شود و معمولاً "نمودار" رسم می‌شود، مورد توجه قرار نمی‌گیرد. مثلاً برای تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(t) = t^۲$، نیمه بالای محور قائم (شکل ۹) یک بار از بالا به پایین (برای $t \leq \circ$) و بار دیگر از پایین به بالا (برای $t \geq \circ$) طی می‌شود و به‌ازای $t = \circ$ یک تغییر جهت $۱۸۰^\circ$ صورت می‌گیرد. بدین ترتیب از این پس معمولاً شرط دوم هموار بودن ($\gamma'(t) \neq \underline{\circ}$) برای اجتناب از مسیرهای حرکت ناهنجار فرض خواهد شد.

شکل ۸

شکل ۹

(۱۲—۳) <u>بازپرمایش (تعویض پارامتر)</u> یک مسیر هندسی در $\mathbb{R}^n$ را ممکن است متحرک‌های گوناگون به شیوه‌های مختلف طی کنند. گذر از یک "پرمایش" (روش پارامتری کردن) به پرمایش دیگر به مثابه در نظر گرفتن حرکت‌های مختلف روی یک مسیر است. یک خم هموار $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر

بگیرید (در نقاط انتهایی $[a,b]$، مشتق یک طرفه منظور می‌شود). تابعی $\alpha : [a',b'] \longrightarrow [a,b]$ در نظر بگیرید که $\alpha$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته $\alpha'$ باشد و $\alpha'(\tau) > 0$ $\alpha$ تناظری یک‌به‌یک میان نقاط $\tau \in [a',b']$ و نقاط $[a,b]$ به شکل $\alpha(\tau) = t$ برقرار می‌کند. بدین ترتیب می‌توانیم از $\tau$ برای مدرج کردن مسیر حرکت، یا تصویر $\gamma$، استفاده کنیم. می‌نویسیم

$$\vec{r} = \gamma(t) = \gamma(\alpha(t)) = (\gamma \circ \alpha)(\tau)$$

و اگر $\gamma \circ \alpha$ را به $\widetilde{\gamma}$ نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم $\widetilde{\gamma}(\tau) = \vec{r}$. $\widetilde{\gamma}$ را یک بازپرمایش جهت‌نگهدار $\gamma$ می‌نامند. اگر قاعدهٔ زنجیری را مؤلفه به مؤلفه به کار گیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}'(\tau) &= \left(\frac{d}{d\tau}\widetilde{\gamma}_1(\tau), \ldots, \frac{d}{d\tau}(\widetilde{\gamma}_n(\tau))\right) \\
&= \left(\gamma_1'(t)\frac{d}{d\tau}, \ldots, \gamma_n'(t)\frac{d}{d\tau}\right) \quad , \quad \left(\frac{dt}{d\tau} = \alpha'(\tau)\right) \\
&= \alpha'(\tau)(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)) = \alpha'(\tau)\gamma'(t)
\end{aligned}$$

پس

$$\widetilde{\gamma}'(\tau) = \alpha'(\tau)\gamma'(t) \tag{۲}$$

از آنجا که $\alpha'(\tau) > 0$ فرض شده است، $\widetilde{\gamma}$ نیز هموار است و بردار سرعت $\widetilde{\gamma}$ همجهت با بردار سرعت $\gamma$ می‌باشد. به همین ترتیب، هرگاه $\alpha : [a',b'] \longrightarrow [a,b]$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد و $\alpha'(\tau) < 0$ برای هر $\tau$، داریم $\alpha(b') = a$ و $\alpha(a') = b$ و $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$ را یک بازپرمایش جهت برگردان $\gamma$ می‌نامیم. در این حالت $\alpha$ نزولی است، نقاط آغازی و پایانی حرکت تعویض می‌شوند، و بردار سرعت $180^\circ$ تغییر جهت می‌دهد.

شکل ۱۰

(۱۲−۴) طول خم فرض کنید $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد. با در نظر گرفتن تعبیر متداول $\gamma'(t)$ به عنوان سرعت در زمان $t$، می‌توان طول این بردار $|\gamma'(t)|$ را تندی حرکت در زمان $t$ تصور کرد. از آنجا که تندی حرکت معمولاً آهنگ پیمودن مسافت نیز تعبیر می‌شود، تعریف مناسبی

برای طول خم به صورت زیر به‌دست می‌آید. نقطه‌ای $t_0$ در $I$ را به عنوان مبدأ اندازه‌گیری طول تثبیت کنید، تابع طول خم $l : I \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = l(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'| \tag{۳}$$

توجه کنید که چون $\gamma'$ (و در نتیجه $|\gamma'|$) پیوسته فرض شده است، این انتگرال وجود دارد و طبق قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \tag{۴}$$

یعنی همان طور که مورد نظر بود، تندی مشتق طول خم پیموده شده نسبت به زمان است. ذکر این نکته ضروری است که تابع $l$ می‌تواند مقدار منفی بگیرد. هرگاه $t > t_0$، $l(t) > 0$، و هرگاه $t < t_0$، $l(t) < 0$ منفی خواهد بود. به طور کلی، $s = l(t)$، "طول جبری خم" از مبدأ حرکت $\gamma(t_0)$ است بدین معنی که طول‌های طی شده در جهت صعود $t$، مثبت، و طول‌های طی شده در جهت نزول $t$، منفی محاسبه می‌شوند. تعریف انتگرال به صورت حد مجموع ریمان تعبیر دیگری از طول به دست می‌دهد. فرض کنید بازهٔ $[t_0, T]$، $T > t_0$، را به صورت زیر افراز کنیم:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = T$$

آنگاه تقریبی برای مفهوم شهودی طول خم از $\gamma(t_0)$ تا $\gamma(T)$، طول خط شکسته‌ای است که از به هم وصل کردن متوالی نقاط $\gamma(t_0)$، $\gamma(t_1)$، $\ldots$، $\gamma(T) = \gamma(t_p)$ به‌دست می‌آید:

$$l(T) \sim \sum_{i=1}^{p} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

شکل ۱۱

حال

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = [(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + \cdots + (\gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به قضیه میانگین می‌توان نوشت $\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})\gamma'_j(t_{ij})$ که $t_{ij}$ نقطه مناسبی در $[t_{i-1}, t_i]$ است. پس

$$l(T) \sim \sum_{i=1}^{p}(t_i - t_{i-1})\sqrt{\gamma'_1(t_{i1})^2 + \cdots + \gamma'_n(t_{in})^2}$$

مقدار $\sqrt{}$ تقریبی برای تندی در طول خم بین $\gamma(t_{i-1})$ و $\gamma(t_i)$ است و می‌توان به طور دقیق نشان داد که حد مجموع بالا وقتی ضمانت افراز به صفر میل کند، برابر $\int_{t_0}^{t} |\gamma'(t)|dt$ است.

مثال. انتگرالی بنویسید که طول خم زیر را که در مختصات قطبی داده شده به دست دهد:

$$r = 1 + 2\cos\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

شکل ۱۲

توجه کنید که به‌ازای $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$، تصویر خم خود را در مبدأ مختصات قطع می‌کند. طول کامل خم (شامل دو طوقه) از (۳) به‌دست می‌آید. برای این کار، خم را به صورت پارامتری برحسب $\theta$ توصیف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \gamma(\theta) = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= ((1 + 2\cos\theta)\cos\theta, (1 + 2\cos\theta)\sin\theta) \\
&= (\cos\theta + 1 + \cos 2\theta, \sin\theta + \sin 2\theta) \\
\gamma'(\theta) &= (-\sin\theta - 2\sin 2\theta, \cos\theta + 2\cos 2\theta) \\
|\gamma'(\theta)| &= \sqrt{5 + 4\cos\theta}
\end{aligned}$$

پس طول خم برابر است با:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$$

حال فرض کنید $\gamma$ یک خم هموار باشد. بازپرمایش جهت‌نگهدار $\gamma$ برحسب طول به صورت زیر حاصل می‌شود. بازه‌ای $[t_0, T]$ در نظر بگیرید و قرار دهید $S = l(T)$. پس $l : [t_0, T] \longrightarrow [0, S]$ یک

تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است که $l'(t) = |\gamma'(t)| > 0$، یعنی $l$ صعودی است. پس وارون ترکیبی $l$، $\alpha = l^{-1}$، وجود دارد و صعودی است و در واقع داریم $\alpha'(s) = \frac{1}{l'(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} > 0$. بازپرمایش $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$ را "بازپرمایش جهت‌نگهدار $\gamma$ برحسب طول" می‌نامیم. به ویژگی مهم زیر توجه کنید

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(t) \cdot \alpha'(s)| = 1 \tag{۵}$$

یعنی هرگاه خم برحسب طول پرمایش شود، تندی برابر واحد است (واحد طول در واحد زمان طی می‌شود). در واقع عکس این مطلب نیز صحیح است، یعنی اگر $|\gamma'(t)| \equiv 1$، می‌توان $t$ را پارامتر طول تعبیر کرد زیرا که در این صورت

$$\int_{t_0}^{t} |\gamma'(u)| du = t - t_0$$

یعنی طول خم از $\gamma(t_0)$ تا $\gamma(t)$ همان اندازهٔ بازهٔ زمانی از $t_0$ تا $t$ است.

(۱۲—۵) فرمول‌های مشتق‌گیری تابع‌های برداری

در (۲) مطلب زیر را با مشتق‌گیری مؤلفه به مؤلفه نشان دادیم:

(۱۲—۵—۱) هرگاه $\alpha : J \longrightarrow I$ یک تابع مشتق‌پذیر از بازهٔ $J$ به بازهٔ $I$ باشد و $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی مشتق‌پذیر، آنگاه:

$$(\gamma \circ \alpha)'(\tau) = \alpha'(\tau)\gamma'(\alpha(\tau)) \qquad \text{(قاعدهٔ زنجیره‌ای)}$$

احکام زیر نیز مشابهاً از مشتق‌گیری مؤلفه به مؤلفه از فرمول‌های نظیر برای تابع‌های با مقدار حقیقی نتیجه می‌شوند. اثبات همه به عهدهٔ دانشجو واگذار می‌شود:

(۱۲—۵—۲) هرگاه $\gamma, \lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشند، تابع‌های $\gamma + \lambda$ و $\gamma \cdot \lambda$ نیز مشتق‌پذیرند و داریم:

$$(\gamma + \lambda)'(t) = \gamma'(t) + \lambda'(t) \tag{۶}$$

$$(\gamma \cdot \lambda)'(t) = \gamma'(t) \cdot \lambda(t) + \gamma(t) \cdot \lambda'(t) \tag{۷}$$

(۱۲—۵—۳) هرگاه $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشند، تابع $f\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ که به صورت $(f\gamma)(t) = f(t)\gamma(t)$ تعریف می‌شود نیز مشتق‌پذیر است، و

$$(f\gamma)'(t) = f'(t)\gamma'(t) + f(t)\gamma'(t) \tag{۸}$$

(۱۲—۵—۴) هرگاه $\gamma, \lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ مشتق‌پذیر باشند، تابع $\gamma \times \lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ که به صورت $(\gamma \times \lambda)(t) = \gamma(t) \times \lambda(t)$ تعریف می‌شود مشتق‌پذیر است و:

$$(\gamma \times \lambda)'(t) = \gamma'(t) \times \lambda(t) + \gamma(t) \times \lambda'(t) \tag{۹}$$