حجم و دترمینان (۲)

هدف ما در این بخش تعمیم مفاهیم دترمینان و حجم به $\mathbb{R}^n$ است. نخست تعریف هندسی و تعریف جبری دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

ستون‌های ماتریس ۲ × ۲ را به ترتیب از چپ به راست به $A^۱$ و $A^۲$، و ستون‌های ماتریس ۳ × ۳ را به $A^۱$، $A^۲$ و $A^۳$ نمایش می‌دهیم. در $\mathbb{R}^۲$، متوازی‌الاضلاع $P(A)$ را به صورت

$$P(A) = \{t_۱A^۱ + t_۲A^۲ \mid ۰ \leq t_۱ \leq ۱, ۰ \leq t_۲ \leq ۱\}$$

و در $\mathbb{R}^۳$، متوازی‌الاضلاع $P(A)$ را به صورت

$$P(A) = \{t_۱A^۱ + t_۲A^۲ + t_۳A^۳ \mid ۰ \leq t_۱ \leq ۱, ۰ \leq t_۲ \leq ۱, ۰ \leq t_۳ \leq ۱\}$$

در نظر می‌گیریم.

(۱۱—۱) تعریف هندسی دترمینان

در حالت ۲ × ۲: مساحت $P(A) = |\det A|$

$$\text{علامت } \det A = \begin{cases} + & \text{اگر زوج مرتب } (A^۱, A^۲) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^۱, A^۲) \text{ چپگرد باشد} \\ ۰ & \text{اگر } \{A^۱, A^۲\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

در حالت ۳ × ۳: حجم $|\det A| = P(A)$

$$\det A \text{ علامت } = \begin{cases} + & \text{اگر سه‌تایی مرتب } (A^{۱}, A^{۲}, A^{۳}) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^{۱}, A^{۲}, A^{۳}) \text{ چپگرد باشد} \\ ۰ & \text{اگر } \{A^{۱}, A^{۲}, A^{۳}\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

(۱۱—۲) تعریف جبری دترمینان

$$\det \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱} \tag{۱}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \mathbf{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳} - a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲} + a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} - a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳} + a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲} - a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} \tag{۲}$$

برای تعمیم این مفاهیم به ماتریس‌های $n \times n$ و $\mathbb{R}^n$، طبعاً ما ذهنیتی پیشینی نسبت ”به حجم nـ بعدی“ و ”راستگرد بودن یک nـ تایی بردارها در $\mathbb{R}^n$“ نداریم. بنابراین راهبرد ما این خواهد بود که تعریف جبری را به‌گونه‌ای تعمیم دهیم که قدرمطلق آن خواصی مشابه مساحت و حجم در $\mathbb{R}^n$ را داشته باشد و علامت آن، nـ تایی‌های برداری مستقل خطی را به دو دستهٔ ”راستگرد“ و ”چپگرد“ تقسیم کند به نحوی که قرابت مورد نظر با دوگونگی متناظر در $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ برقرار شود. به این منظور سه ویژگی دترمینان در حالت ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را در زیر مورد نظر قرار می‌دهیم و خواهیم دید که به طور کلی برای ماتریس‌های $n \times n$ یک و تنها یک روش نسبت دادن یک عدد به یک ماتریس وجود دارد که این سه ویژگی را داراست. این عدد را ”دترمینان ماتریس“ نام خواهیم گذارد.

پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$، یعنی $(\mathrm{e}_{۱}, \dots, \mathrm{e}_n)$ را در نظر بگیرید. مقصود از مکعب nـ بعدی واحد، مجموعه

زیر است:

$$K^n = \{t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \mid 0 \leq t_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq t_n \leq 1\} \qquad (۳)$$

برای $n = 1$، داریم $K^1 = [0, 1]$، برای $n = 2$، $K^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ و برای $n = 3$، $K^3 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ (شکل ۱)

به طور کلی، برای n عضو $A^1, \ldots, A^n$ در $\mathbb{R}^n$، متوازی‌السطوح nـ بعدی ایجاد شده توسط $A^1, \ldots, A^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A^1, \ldots, A^n) = \{t_1 A^1 + \cdots + t_n A^n \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\} \qquad (۴)$$

اگر nـ تایی‌های A^1 تا A^n را به ترتیب به عنوان ستون‌های یک ماتریس A در نظر می‌گیریم، $P(A^1, \ldots, A^n)$ را به طور خلاصه به $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

(۱۱—۳) سه ویژگی اساسی دترمینان (برای ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳)

(۱۱—۳—۱) دترمینان نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون‌های ثابت نگاه‌داشته شوند.

مقصود از ”خطی بودن“ برقراری دو شرط ۷—۱ است، یعنی اگر همهٔ درایه‌های یک ستون در عددی r ضرب شوند، دترمینان در r ضرب می‌شود. اگر یک ستون (به عنوان یک nـ تایی عددی) برابر مجموع دو ستون باشد، دترمینان برابر مجموع دترمینان‌های ماتریس‌هایی خواهد شد که از تفکیک دو ستون به‌دست می‌آیند. مثلاً:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

این دو شرط به سادگی از تعریف جبری (۱) و (۲) به‌دست می‌آیند. نکته این است که در هر جملهٔ سمت راست (۱) و (۲) فقط یک درایه از هر ستون ظاهر می‌شود و با درجه یک. وقتی $r > 0$، تعبیر

هندسی شرط اول این است که با ضرب کردن طول یک ضلع متوازی‌الاضلاع (به ترتیب یک ضلع متوازی‌السطوح) در r و ثابت نگاه‌داشتن اضلاع دیگر، مساحت متوازی‌الاضلاع (به ترتیب حجم متوازی‌السطوح) در r ضرب می‌شود. وقتی $r < ۰$، جهت گردش (راستگردی یا چپگردی) اضلاع معکوس می‌شود، بنابراین علامت دترمینان عوض می‌شود (شکل ۲).

تعبیر هندسی شرط دوم در حالت $n = ۲$ در شکل ۳ نمایش داده شده است. اگر یک ضلع متوازی‌الاضلاع، مثلاً ضلع u، برابر مجموع $u' + u''$ باشد به طوری که (u, v)، (u', v) و (u'', v) هر سه راستگرد یا هر سه چپگرد باشند، مساحت $P(u, v)$ برابر مجموع مساحت‌های $P(u', v)$ و $P(u'', v)$ می‌شود. وقتی جهت گردش سه دوتایی یکسان نباشد، باید علامت دترمینان را نیز منظور کرد. تعبیر مشابهی در حالت سه‌بعدی برقرار است و این حکم را می‌توان از اینکه مساحت برابر $|u \times v|$ و حجم برابر $|(u \times v) \cdot w|$ است نتیجه گرفت.

اکنون ویژگی اساسی دوم دترمینان را بیان می‌کنیم:

(۱۱—۳—۲) دترمینان نسبت به ستون‌ها "ضدمتقارن" است، یعنی هرگاه جای دو ستون تعویض شود، دترمینان در (-۱) ضرب می‌شود.

این مطلب را می‌توان به طور جبری از تعریف‌های جبری (۱) و (۲) مشاهده کرد. تعبیر هندسی این است که تعویض ترتیب دو ضلع جهت گردش را معکوس می‌کند. توجه کنید که اگر k بار تعویض ستونی صورت گیرد، هر بار دترمینان در (-۱) ضرب می‌شود، بنابراین پس از k تعویض، دترمینان در $(-۱)^k$ ضرب خواهد شد.

بالاخره، ویژگی اساسی سوم دترمینان به شرح زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۱ \quad , \quad \det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۱ \qquad (۱۱-۳-۳)$$

در حالت ۲×۲، این بدین معنی است که مساحت مربع واحد برابر یک است و دوتایی مرتب

$(\mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲)$ راستگرد می‌باشد. مشابهاً در حالت ۳ × ۳، حجم مکعب واحد برابر یک است و سه‌تایی مرتب $(\mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲, \mathrm{e}_۳)$ راستگرد است.

خواهیم دید که این سه ویژگی دترمینان را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند. لازم است نخست مفهوم "ضدتقارن" را کمی بیشتر بررسی کنیم. به طور کلی جابجا کردن ترتیب n شیء، مانند n ستون یک ماتریس $n \times n$، یک "جایگشت" خوانده می‌شود. اگر n شیء را با شماره‌گذاری به مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ نمایش دهیم، یک جایگشت $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در واقع یک تابع یک به یک و پوشا از $\{۱, \ldots, n\}$ به خود آن است.

$$\sigma : \{۱, \ldots, n\} \longrightarrow \{۱, \ldots, n\}$$

مقصود از $\sigma(i)$ جای جدید i است. تابع همانی جایگشتی است که هر یک از ۱ تا n را سرجای خود نگاه می‌دارد. یک نوع جایگشت ساده، "تبادل" است. مقصود از یک تبادل یا ترانهش جایگشتی است که $(n - ۲)$ عنصر را تثبیت می‌کند و جای دو عنصر باقیمانده را تعویض می‌کند. مثلاً

$$۱ \longrightarrow ۱ \quad , \quad ۲ \longrightarrow ۳ \quad , \quad ۳ \longrightarrow ۲ \quad , \quad ۴ \longrightarrow ۴$$

یک تبادل $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است.

(۱۱—۴) قضیه. هر جایگشت $\{۱, \ldots, n\}$ را می‌توان به صورت ترکیبی متناهی از تبادل‌ها نمایش داد. روش نمایش یکتا نیست ولی تعداد تبادل‌های لازم همواره زوج یا همواره فرد است.

برهان. حکم اول را می‌توان با استقراء ثابت کرد. برای $n = ۱$، حکم واضح است. فرض کنید حکم تا n ثابت شده است، آن را برای $(n + ۱)$ ثابت می‌کنیم. پس فرض کنید σ یک جایگشت $\{۱, \ldots, n, n + ۱\}$ است. اگر σ همانی باشد، می‌توان نوشت $\sigma = \tau \circ \tau$ که τ یک تبادل دلخواه است. اگر σ همانی نباشد، σ دست‌کم یک i را جابجا می‌کند، مثلاً $\sigma(i) = j \neq i$. حال تبادل ρ را در نظر بگیرید که بدین صورت تعریف می‌شود: $\rho(i) = j$، $\rho(j) = i$ و $\rho(k) = k$ اگر $k \neq i, j$ ترکیب $\rho \circ \sigma$

جایگشتی است که i را تثبیت می‌کند زیرا که $(\rho\circ\sigma)(i)=\rho(j)=i$. بدین ترتیب می‌توان $\rho\circ\sigma$ را یک جایگشت n شیء $\{۱,\ldots,i-۱,i+۱,\ldots,n+۱\}$ تلقی کرد. طبق فرض استقراء، ρ باید ترکیب تعدادی تبادل τ_i باشد (که i را ثابت نگاه می‌دارند)، $\rho\circ\sigma=\tau_k\circ\cdots\circ\tau_۱$. حال اگر روی دو طرف، تبادل ρ را اثر دهیم، چون همانی $=\rho\circ\rho$، نتیجه می‌شود که $\sigma=\rho\circ\tau_k\circ\cdots\circ\tau_۱$ یعنی σ ترکیبی از تبادل‌ها است.

برای حکم دوم نخست به هر جایگشت σ از $\{۱,\ldots,n\}$ عدد $\varepsilon(\sigma)$ را به صورت زیر نسبت می‌دهیم:

$$\varepsilon(\sigma)=\frac{۱}{(۱)!(۲)!\ldots(n-۱)!}\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i)) \tag{۵}$$

نشان می‌دهیم که $\varepsilon(\sigma)=\pm۱$. توجه کنید که به‌ازای هر $k\neq l$، $k,l\in\{۱,\ldots,n\}$، جملهٔ $(k-l)$ یا $(l-k)$ یک و فقط یک بار در حاصل‌ضرب سمت راست ظاهر می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\textstyle\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j)) &= \pm\textstyle\prod_{k<l}(l-k)\\ &= \pm(\textstyle\prod_{۱<l}(l-۱))(\prod_{۲<l}(l-۲))\ldots(\prod_{n-۱<l}(l-(n-۱)))\end{aligned}$$

و طرف راست برابر $\pm(n-۱)!\ldots(۱)!$ است. بنابراین $\varepsilon(\sigma)=\pm۱$. حال اثر ترکیب یک تبادل τ را با σ بر $\varepsilon(\sigma)$ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم $\varepsilon(\tau\circ\sigma)=-\varepsilon(\sigma)$. فرض کنید تبادل τ دو عدد متمایز μ و ν را جابجا می‌کند و سایر اعداد را ثابت نگاه می‌دارد، مثلاً $\mu<\nu$. در حاصل‌ضرب طرف راست (۵) جملات $(\sigma(j)-\sigma(i))$ که در آنها $\sigma(i)\neq\mu,\nu$ و $\sigma(j)\neq\mu,\nu$ تغییری نمی‌کنند، داریم:

$$(\tau\circ\sigma)(j)-(\tau\circ\sigma)(i)=\sigma(j)-\sigma(i)$$

یکی از دو جملهٔ $(\nu-\mu)$ یا $(\mu-\nu)$ یک و فقط یک‌بار به صورت $(\sigma(i)-\sigma(j))$ ظاهر می‌شود که با اثر دادن τ، در (-۱) ضرب می‌شود. سایر جملات $(\sigma(j)-\sigma(i))$ را که در آنها یکی از جمله‌ها برابر μ یا ν است. می‌توان دوتا، دوتا، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\pm(\sigma(k)-\nu)(\sigma(k)-\mu)\quad,\quad\sigma(k)\neq\mu,\nu \tag{۶}$$

و (٦) تحت اثر τ تغییر علامت نمی‌دهد:

$$\begin{aligned}((\tau\circ\sigma)(k)-\tau(\nu))((\tau\circ\sigma)(k)-\tau(\mu)) &= (\sigma(k)-\mu)(\sigma(k)-\nu)\\ &= (\sigma(k)-\nu)(\sigma(k)-\mu)\end{aligned}$$

بنابراین ماحصل اثر دادن τ این است که $\varepsilon(\sigma)$ در (۱−) ضرب می‌شود:

$$\varepsilon(\tau\circ\sigma)-\varepsilon(\sigma) \qquad , \text{تبادل } : \tau \tag{۷}$$

توجه کنید که اگر σ همانی باشد، $\varepsilon(\sigma)=۱$ زیرا به‌ازای $i<j$، $\sigma(j)-\sigma(i)=j-i>۰$. بنابراین برای هر تبادل τ داریم $\varepsilon(\tau)=-۱$. حال اگر σ یک جایگشت دلخواه باشد، طبق قسمت اول قضیه، σ را به صورت ترکیبی از تبادل‌ها می‌نویسیم، $\sigma=\tau_k\circ\cdots\circ\tau_۱$ با استفاده مکرر از (۷) داریم:

$$\varepsilon(\sigma)=(-۱)^k \tag{۸}$$

که k تعداد تبادل‌هاست. چون به هر σ یک $\varepsilon(\sigma)$ مشخص نسبت داده شده است، (۸) نشان می‌دهد تعداد تبادل‌های لازم برای نمایش σ باید همواره زوج یا همواره فرد باشد. □

به عنوان دستاوردی از قضیه بالا، اگر $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ دو جایگشت باشند، داریم:

$$\varepsilon(\sigma_۱\circ\sigma_۲)=\varepsilon(\sigma_۱)\cdot\varepsilon(\sigma_۲) \tag{۹}$$

یک جایگشت را زوج (به ترتیب فرد) می‌نامیم در صورتی که $\varepsilon(\sigma)=+۱$ (به ترتیب $\varepsilon(\sigma)=-۱$). هر جایگشت زوج ترکیب تعدادی زوج تبادل است و هر جایگشت فرد ترکیب تعدادی فرد تبادل.

به کمک قضیه ۱۱−۴ اکنون می‌توانیم نسبت به تعمیم مفهوم دترمینان به ماتریس‌های $n\times n$ اقدام کنیم.

(۱۱−۵) گزاره. فرض کنید به هر ماتریس $n\times n$، A، عددی $D(A)$ نسبت داده‌ایم که واجد دو شرط زیر است:

الف) $D(A)$ نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون‌ها ثابت نگاه‌داشته شوند.

ب) $D(A)$ نسبت به ستون‌ها ضدمتقارن است، یعنی جابجایی دو ستون آن را در (-۱) ضرب می‌کند.

در این صورت مقدار $D(I_n)$، D را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند.

برهان. ستون‌های ماتریس $A = [a_{ij}]$ را به $A^۱, \ldots, A^n$ نمایش می‌دهیم. اگر ستون j ام، A_j را به عنوان یک n تایی، یعنی عضوی از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم، داریم:

$$A^j = a_{۱j}e_۱ + \cdots + a_{nj}e_n$$

با توجه به (الف) داریم

$$D(A) = \sum_{i_۱=۱}^{n} \cdots \sum_{i_n=۱}^{n} a_{i_۱ ۱} a_{i_۲ ۲} \ldots a_{i_n n} D[e_{i_۱}|e_{i_۲}|\cdots|e_{i_n}] \qquad (۱۰)$$

در ماتریس بالا چنانچه برای $\mu \neq \nu$ داشته باشیم $e_{i_\mu} = e_{i_\nu}$، مقدار $D[e_{i_۱}|\cdots|e_{i_n}]$ صفر می‌شود زیرا که جابجایی e_{i_μ} و e_{i_μ} از یک طرف ماتریس سمت راست بالا را عوض نمی‌کند و از طرفی دیگر طبق (ب) مقدار D باید در (-۱) ضرب شود. بنابراین $D[e_{i_۱}|\ldots|e_{i_n}]$ صفر است مگر اینکه $(i_۱, i_۲, \ldots, i_n)$ جایگشتی σ از $(۱, ۲, \ldots, n)$ باشد. بنابراین می‌توان (۱۰) را به صورت زیر نوشت:

$$D(A) = \sum_{\sigma:\text{جایگشت}} a_{\sigma(۱),۱} \ldots a_{\sigma(n),n} D[e_{\sigma(۱)}|\cdots|e_{\sigma(n)}]$$

ولی از خاصیت ضد تقارن (ب) می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\begin{aligned} D[e_{\sigma(۱)}|\cdots|e_{\sigma(n)}] &= \varepsilon(\sigma) D[e_۱|\cdots|e_n] \\ &= \varepsilon(\sigma) D(I_n) \end{aligned}$$

پس

$$D(A) = \sum_{\sigma:\text{جایگشت}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(۱),۱} \ldots a_{\sigma(n),n} D(I_n) \qquad (۱۱)$$

و گزاره به اثبات می‌رسد. $\square$

همچنان که در بررسی سه ویژگی اصلی دترمینان ۲ × ۲ و ۳ × ۳ دیدیم، ویژگی‌های اول و دوم، که مشابه (الف) و (ب) هستند، ویژگی‌های ابتدایی مساحت و حجم متوازی‌الاضلاع و متوازی‌السطوح با منظور کردن علامت هستند ویژگی سوم، یعنی نسبت‌دادن عددی به مکعب واحد، به منزله ارائه واحد یا مقیاس برای مساحت یا حجم است.

توجه کنید که ستون‌های I_n در واقع بردارهای تعریف کننده مکعب واحد هستند. با تعیین $D(I_n)$ مقدار $D(A)$ برای هر ماتریس A مشخص می‌شود. چنانچه $D(I_n)$ را برابر ۱ بگیریم تابع D حاصل، طبق تعریف، $\det(A)$ (دترمینان A)، خوانده می‌شود، پس:

$$\det A = \sum_{\sigma: \text{جایگشت}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \qquad (۱۲)$$

(۱۱—٦) نتیجه. تابع $\det$ که به هر ماتریس $n \times n$ مقدار (۱۲) را نسبت می‌دهد یگانه تابع از ماتریس‌های $n \times n$ به $\mathbb{R}$ است که سه ویژگی زیر را دارد: (الف) نسبت به هر ستون خطی است وقتی سایر ستون‌ها ثابت نگاه‌داشته شوند. (ب) نسبت به ستون‌ها ضدمتقارن است، و (ج) $\det(I_n) = 1$. □

تعریف. برای $A^1, \dots, A^n \in \mathbb{R}^n$، حجم nـ بعدی متوازی‌السطوح $P(A)$ برابر $|\det A|$ است.

تعبیر زیر برحسب نگاشت‌های خطی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ماتریس A که از کنار هم قراردادن n تایی‌های $A^1, \dots, A^n$ به‌دست می‌آید در واقع نماینده یک نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است که $f(e_j) = A^j$، برای هر $j = 1, \dots, n$. $\det f$ را همان $\det A$ تعریف می‌کنیم. نگاشت خطی f مکعب واحد را به متوازی‌السطوح $P(A)$ می‌نگارد. پس $|\det f|$ در واقع حجم nـ بعدی تصویر مکعب واحد تحت f است.

(۱۱—۸) گزاره. برای تابع‌های خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\det(g \circ f) = (\det g)(\det f) \qquad (۱۳)$$

یا اگر ماتریس f را به A و ماتریس g را به B نمایش دهیم:

$$\det(BA) = (\det B)(\det A) \tag{۱۴}$$

برهان. برای اثبات، g (معادلاً B) را تثبیت می‌کنیم و دو تابع زیر از مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ به $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$D_1, D_2 : n \times n \text{ مجموعه‌ماتریس‌های } \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D_1(A) = (\det B)(\det A)$$

$$D_2(A) = \det(BA)$$

اگر نشان دهیم D_1 و D_2 هر دو واجد شرط‌های (الف) و (ب) گزارهٔ (۱۱—۵) هستند، از این گزاره نتیجه می‌شود که مقدار D_1 و D_2 با دانستن مقدار آنها به‌ازای $A = I_n$ تعیین می‌شود. ولی داریم:

$$D_1(I_n) = (\det B)(\det I_n) = \det B$$

$$D_2(I_n) = \det(BI_n) = \det B$$

پس اگر ثابت شود که شرط‌های (الف) و (ب) برای D_1 و D_2 برقرارند، خواهیم داشت $D_1(A) = D_2(A)$ برای هر ماتریس A و حکم گزاره به اثبات می‌رسد. برای $D_1(A)$ که مضرب ثابتی از $\det A$ است برقرار بودن (الف) و (ب) واضح است. موضوع را در مورد D_2 تحقیق می‌کنیم. فرض کنید A^j، ستون jـ ام A، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{1j} \\ \vdots \\ a''_{nj} \end{bmatrix}$$

در این صورت ستون jـ ام ماتریس BA می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} b_{1\nu} a_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu} a_{\nu j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} b_{1\nu} a'_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu} a'_{\nu j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} b_{1\nu} a''_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu} a''_{\nu j} \end{bmatrix}$$

چون ویژگی (الف) در مورد $\det$ برقرار است داریم:

$$\det(BA) = \det(BA') + \det(BA'')$$

که در آن A' و A'' ماتریس‌های هستند که از تفکیک ستون jـ ام ماتریس A به‌دست آمده‌اند. پس

$$D_۲(A) = D_۲(A') + D_۲(A'')$$

همین‌طور اگر ستون jـ ام A در عدد r ضرب شود، ستون jـ ام BA نیز در r ضرب خواهد شد و خطی بودن نسبت به ستون jـ ام ثابت می‌شود. در مورد ویژگی (ب)، اگر A' ماتریس باشد که از تعویض ستون‌های i و j ماتریس A به‌دست آید، BA' نیز از تعویض ستون‌های i و j ماتریس BA حاصل می‌شود زیرا که به طور کلی در حاصل‌ضرب دو ماتریس MN، ستون j ام از ضرب کردن ردیف‌های M در ستون jـ ام N به‌دست می آید. پس چون $\det$ واجد شرط (ب) است و این شرط برای $D_۲$ نیز نتیجه می‌شود و گزاره به اثبات می‌رسد. □

گزاره بالا نتایج مهمی در پی دارد از جمله:

(۱۱—۹) نتیجه. شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری تابع خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ این است که $\det f \neq ۰$. مشابهاً شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری ماتریس $n \times n$، A، این است که $\det A \neq ۰$.

برهان. اگر A وارون‌پذیر باشد، ماتریسی $A^{-۱}$ وجود دارد که $AA^{-۱} = I$، پس طبق (۱—۸)، $(\det A)(\det A^{-۱}) = ۱$، در نتیجه $\det A \neq ۰$. بالعکس اگر A (یا معادلاً تابع خطی متناظر، f) وارون‌پذیر نباشد، می‌دانیم ستون‌های A وابستهٔ خطی خواهند شد، پس می‌توان یک ستون را به صورت ترکیب خطی ستون‌های دیگر نوشت. پس با استفاده از بسط دادن به کمک ویژگی (الف)، به مجموع $(n - ۱)$ دترمینان ماتریس‌هایی می‌رسیم که یک ستون آنها تکرار شده است. دترمینان ماتریسی که دو ستون برابر داشته باشد صفر است زیرا که با تعویض دو ستون از یک سو ماتریس عوض نمی‌شود و از سویی طبق (ب) مقدار دترمینان باید در (۱—) ضرب شود. □

یک دستاورد برهان بالا را جداگانه ثبت می‌کنیم:

(۱۱—۱۰) نتیجه. مجموعهٔ $\{A^۱, \ldots, A^n\}$ از عناصر $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر

$\det A \neq 0$. $\square$

اکنون می‌توانیم مفهوم "راستگرد" و "چپگرد" را در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم. فرض کنید $\{A^1, \ldots, A^n\}$ مستقل خطی است. n تایی مرتب $(A^1, \ldots, A^n)$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم چنانچه $\det A > 0$ (به ترتیب $\det A < 0$). بدین ترتیب عیناً مانند حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی $\det A$ حاوی دو اطلاع زیر است:

i) $|\det A|$ برابر حجم nـ بعدی متوازی‌السطوح $P(A)$ است.

ii) علامت $\det A$ نشان‌دهندهٔ راستگردی یا چپگردی n تایی مرتب ستون‌های $(A^1, \ldots, A^n)$ است.