تمرین‌های حجم و دترمینان

تمرین‌های کتاب

بخش ۳—۱۲: ۳، ۸، ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۳ تا ۲۶، ۲۹، ۳۴، ۳۵
بخش ۴—۱۲: ۴۲، ۵۳، ۵۴، ۵۷، ۵۸، ۶۰

۱) اتحادهای زیر را در $\mathbb{R}^3$ ثابت کنید:

الف) $A \times (B \times C) = (A.C)B - (A.B)C$

ب) (اتحاد ژاکوبی)

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = \underline{\mathbf{0}}$$

ج) (اتحاد لاگرانژ)

$$(A \times B).(C \times D) = (A.D)(B.D) - (A.D)(B.C)$$

۲) فرض کنید A و B عناصر داده شدهٔ $\mathbb{R}^3$ هستند که A، صفر نیست. مجموعهٔ Uهایی در $\mathbb{R}^3$ را توصیف کنید که $A \times U = B$.

۳) فرض کنید P یک متوازی‌الاضلاع در $\mathbb{R}^3$ است. تصویر قائم P روی سه صفحه مختصاتی را به P_1، P_2 و P_3 نمایش دهید. فرض کنید مساحت‌های P_1، P_2 و P_3 به ترتیب A، A_1، A_2 و A_3 هستند. نشان دهید $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$.

۴) وجه‌های یک چهاروجهی در $\mathbb{R}^3$ را به a، b، c و d نمایش دهید. فرض کنید A یک بردار عمود بر a به سوی خارج چهاروجهی باشد که طول آن عددی برابر مساحت وجه a است به همین ترتیب B، C و D را نسبت به b، c و d تعریف کنید. نشان دهید:

$$A + B + C + D = \underline{\mathbf{0}}$$

۵) برای چهارتایی $\{A^1, A^2, A^3, A^4\}$ در (الف) و (ب)، تعیین کنید این مجموعه مستقل خطی است یا وابسته خطی، و اگر مستقل خطی است، تعیین کنید چهارتایی مرتب (A^1, A^2, A^3, A^4) راستگرد است یا چپگرد:

الف) $A^1 = (1, 1, 0, -1)$، $A^2 = (0, -1, 1, 1)$،
$A^3 = (0, 0, 1, -1)$، $A^4 = (2, 0, 0, 0)$

ب) $A^1 = (1, 1, 0, -1)$، $A^2 = (0, -1, 1, 1)$،
$A^3 = (0, 0, 1, -1)$، $A^4 = (2, 1, 0, 0)$

۶) برای هریک از جایگشتهای σ در زیر، σ را به‌صورت ترکیبی از تبادل‌ها بنویسید و $\epsilon(\sigma)$ را محاسبه کنید:

الف) $\sigma : [1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 2]$

ب) $\sigma : [1 \to 3, 2 \to 5, 3 \to 2, 4 \to 4, 5 \to 1]$

ج) $\sigma : [1 \to 2, 2 \to 3, \ldots, n-1 \to n, n \to 1]$، n عدد طبیعی

د) $\sigma : [1 \to 1+q, 2 \to 2+q, \ldots, p \to p+q, p+1 \to 1, \ldots, p+q \to q]$، p و q اعداد طبیعی

۷) دترمینان‌های ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$

ج) ماتریس $[a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = i.j$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

هـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & n-1 \\ n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$

ز) ماتریس $[a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = 0$ اگر $i > j$.

۸) برای هریک از nتایهای مرتب زیر در $\mathbb{R}^n$، تعیین کنید nتایی راستگرد است یا چپگرد.

الف) (e_2, e_3, e_4, e_1) در $\mathbb{R}^4$، ب) $(e_2, e_3, \ldots, e_n, e_1)$ در $\mathbb{R}^n$،

ج) $(e_1, e_1+e_2, \ldots, e_1+e_2+\ldots+e_n)$ در $\mathbb{R}^n$، د) $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$ در $\mathbb{R}^n$

۹) چون هر جایگشت σ یک تابع یک به یک پوشا از $\{1, \ldots, n\}$ به خود آن است، σ^{-1} نیز یک جایگشت است. نشان دهید $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$. برای هر ماتریس $A = [a_{ij}]$، ترانهادهٔ A، $A^T = [b_{ij}]$، به‌صورت $b_{ij} = a_{ij}$ تعریف می‌شود. نشان دهید $\det(A^T) = \det A$.

۱۰) نشان دهید

$$\det \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)$$

۱۱) برای ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]$، A^{ij} دترمینان ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ است که از حذف ردیف iـ ام و ستون jـ ام A به‌دست می‌آید. نشان دهید:

الف) (بسط برحسب ستون jـ ام) $\quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A^{ij}$

ب) (بسط برحسب ردیف iـ ام) $\quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A^{ij}$