تمرین بخش‌های ۶ تا ۹

۱) فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ خطی است، E و E' دو زیرفضای مستوی در $\mathbb{R}^n$ که موازی هستند (نه لزوماً هم‌بعد). نشان دهید $f(E)$ و $f(E')$ موازی هستند (یا یکی زیرمجموعه‌ای از دیگری است).

۲) فرض کنید M زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. ثابت کنید M یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ است اگر وتنها اگر شرط زیر برقرار باشد. برای هر سه عنصر $u,v,w\in M$ و هر $r\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $ru-rv+w\in M$.

۳) برای تابع‌های خطی که به وسیلهٔ هریک ماتریس‌های زیر داده شده‌اند تحقیق کنید تابع یک‌به‌یک یا پوشا هست یا نیست. در هر مورد هستهٔ تابع و بعد تصویر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ح)

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & & & \bigcirc \\ & ۰ & ۱ & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & ۰ & ۱ \\ \bigcirc & & & & ۰ \end{bmatrix}$$

۴) نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{3}$ با ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده است. تصویر خط و صفحهٔ زیر را تحت اثر f پیدا کنید: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}$، $x+2y-2z-4=0$

۵) نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^{4}\to\mathbb{R}^{5}$ با ماتریس زیر داده شده است.

الف) صفحه‌ای در $\mathbb{R}^{4}$ مثال بزنید که تصویر آن یک خط راست باشد و صفحه‌ای مثال بزنید که تصویر آن یک صفحه باشد.

ب) ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^{4}$ مثال بزنید که تصویر آن یک صفحه باشد و ابرصفحه‌ای مثال بزنید که تصویر آن سه‌بعدی باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

٦) تابع خطی $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ با ماتریس $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ داده شده است که در آن a و b اعداد حقیقی ثابت هستند و $a^{2}+b^{2}\neq 0$. نشان دهید اگر دو خط ℓ_{1},ℓ_{2} در صفحه با یکدیگر زاویهٔ α بسازند، آنگاه $f(\ell_{1})$ و $f(\ell_{2})$ نیز دو خط هستند که با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند.

۷) اگر E_{1},E_{2} دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^{n}$ باشند که $E_{1}\cup E_{2}$ نیز یک زیرفضای خطی است، نشان دهید $E_{1}\subset E_{2}$ یا $E_{2}\subset E_{1}$.

۸) فرض کنید تابع خطی $f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ چنان باشد که $f\circ f$ تابع صفر است. نشان دهید بعد هسته f بزرگتر یا مساوی n است.

۹) فرض کنید برای ماتریس $n\times n$، $A\neq 0$، ماتریسی $n\times n$، $B\neq 0$، وجود داشته باشد که $AB=0$. نشان دهید ماتریسی $n\times n$، $C\neq 0$، که $CA=0$. (راهنمایی: ماتریس‌ها را به‌صورت تابع خطی تلقی کنید.)

توجه. تمرین‌های زیر همه در مورد دستگاه m معادلهٔ n مجهولی خطی زیر هستند:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_{1}+\ldots+a_{1n}x_{n}=b_{1} \\ \qquad\ldots \\ a_{m1}x_{1}+\ldots+a_{mn}x_{n}=b_{m} \end{cases}$$

۱۰) اگر به ازای یک $b=(b_{1},\ldots,b_{m})$ جواب منحصر به‌فرد باشد، آنگاه به ازای هر b که جواب وجود داشته باشد، جواب منحصر به‌فرد است.

۱۱) اگر به ازای یک b، دستگاه بیش از یک جواب داشته باشد، آنگاه به ازای هر b که دستگاه جواب داشته باشد، بیش از یک جواب دارد.

۱۲) آیا حکم زیر درست است؟ اگر درست است آن را ثابت کنید و اگر نادرست، مثال ناقضی ارائه کنید:

"اگر تعداد مجهول‌ها، n، بیش از تعداد معادلات، m، باشد، به ازای هر b دستگاه جواب دارد."

۱۳) آیا حکم زیر درست است؟ اگر درست است آن را ثابت کنید و اگر نادرست، مثال ناقضی ارائه کنید:

" اگر تعداد مجهول‌ها، n، بیش از تعداد معادلات باشد، به ازای هر b که دستگاه جواب داشته باشد در واقع بی‌نهایت جواب دارد."

۱۴) اگر دستگاه به ازای بیش از یک b جواب داشته باشد، آنگاه دستگاه به ازای بی‌نهایت b متمایز جواب دارد.