تمرین بخش‌های ۴ و ۵

۱) نشان دهید برای هر u و v در $\mathbb{R}^n$:

$$|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2) \qquad \text{(اتحاد متوازی‌الاضلاع)}$$

۲) نشان دهید برای هر u، v و w در $\mathbb{R}^n$:

$$|u+v|^2+|v+w|^2+|w+u|^2=|u|^2+|v|^2+|w|^2+|u+v+w|^2 \qquad \text{(اتحاد متوازی‌السطوح)}$$

۳) (سخت) نشان دهید برای هر u، v و w در $\mathbb{R}^n$:

$$|u+v|+|v+w|++|w+u|\leq|u|+|v|+|w|+|u+v+w|$$

۴) فرض کنید d_1، …، d_n اعداد مثبت داده شده‌اند. برای u و v در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم:

$$u*v=d_1u_1v_1+d_2u_2v_2+\ldots+d_nu_nv_n$$

الف) نشان دهید چهار 'ویژگی ابتدایی ضرب داخلی'، یعنی ۴–۲–۱ تا ۴–۲–۴، در مورد $*$ صدق می‌کنند. بدین‌ترتیب اگر طول را به‌صورت $|u|=\sqrt{u*u}$ تعریف کنیم، نامساوی کوشی‌ـ شوارتس و نامساوی مثلث برقرارند، و اگر زاویه را به‌صورت $\cos^{-1}\frac{u*v}{|u||v|}$ تعریف کنیم، قضیه فیثاغورس همچنان برقرار می‌ماند.

ب) نشان دهید نسبت به این ضرب داخلی، n محور مختصاتی همچنان دو بر دو بر هم عمودند. بردارهای واحد در امتداد محورهای مختصات را پیدا کنید.

۵) اعداد حقیقی a، b و c داده شده‌اند به‌طوری که $a>0$ و $ac-b^2>0$. برای u و v در $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌کنیم

$$u*v=au_1v_1+b(u_1v_2+u_2v_1)+cu_2v_2$$

الف) نشان دهید چهار ویژگی ابتدایی ضرب داخلی، یعنی ۴–۲–۱ تا ۴–۲–۴، در مورد $*$ صدق می‌کنند.

ب) اگر $a = 2$، $b = c = 1$، نسبت به این ’ضرب داخلی‘، زاویهٔ بین محورهای متداول مختصات در $\mathbb{R}^2$ چیست؟

۶) در $\mathbb{R}^4$ معادلهٔ ابرصفحه‌ای را که از $(1, -1, 2, 3)$ می‌گذرد و بر خط راست $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4 + 1}{3}$ عمود است پیدا کنید.

۷) در $\mathbb{R}^5$ معادلهٔ خط راستی را که از $(2, 1, -1, 0, 3)$ می‌گذرد و بر ابرصفحهٔ $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + 1 = 0$ عمود است پیدا کنید.

۸) صفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ پیدا کنید که از $(-1, -1, 0, 1)$ بگذرد و بر صفحه گذرا از سه نقطهٔ $(1, 1, 0, 0)$، $(-1, 1, 2, 3)$ و $(2, -1, -1, 1)$ عمود باشد. آیا چنین صفحه‌ای منحصر به‌فرد است؟

۹) در $\mathbb{R}^n$ نشان دهید تصویر قائم u بر راستای v، $v \neq \underline{0}$، نقطهٔ اشتراک ابرصفحهٔ گذرا از u و عمود بر خط راست $< v >$ است. (توجه کنید که تصویر قائم u بر راستای v طبق تعریف برابر است با $\frac{u.v}{|v|^2} v$).

۱۰) فرض کنید E یک زیرفضای خطی k بُعدی $\mathbb{R}^n$ است $(k < n)$ و $(b_1, \ldots, b_k)$ یک پایهٔ راست هنجار برای E می‌باشد. برای $u \in \mathbb{R}^n$، تصویر قائم u بر E را به‌صورت

$$u' = \sum_{i=1}^{k} (u.b_i) b_i$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید u' بالا یگانه عنصر E است که $u - u'$ بر E عمود می‌باشد.

۱۱) در تمرین ۱۰ فرض کنید E' زیرفضای مستوی k بُعدی $\mathbb{R}^n$ موازی E و گذرا از نقطهٔ P است. تعریف مناسبی برای تصویر قائم u بر E ارائه کنید.

۱۲) در موارد زیر قائم نقطهٔ داده شده بر زیرفضای داده شده را پیدا کنید:

الف) در $\mathbb{R}^3$، تصویر قائم $(1, 1, -1)$ بر صفحهٔ $x + y + z = 0$ و بر صفحهٔ $x + y + z + 2 = 0$.

ب) در $\mathbb{R}^4$، تصویر قائم $(1, -1, 0, 2)$ بر راستای $v = (2, 3, -1, 1)$ و بر خط راست $\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3 - 2}{1} = \frac{x_4 + 1}{-1}$

ج) در $\mathbb{R}^4$، تصویر قائم $(1, -1, 0, 2)$ بر صفحهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(2, 2, -1, 1)$، $(3, -1, 0, 2)$ و $(2, 0, 1, 0)$.

د) در $\mathbb{R}^4$، تصویر قائم $(1, -1, 0, 2)$ بر ابرصفحهٔ $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 1$.

۱۳) در هر مورد، مجموعهٔ S داده شده را به یک پایهٔ متعامد برای فضای داده شده تکمیل کنید، سپس از پایهٔ متعامد حاصل شده، یک پایهٔ راست هنجار بسازید. در مواردی که مجموعهٔ داده شده بیش از یک عضو دارد نخست تحقیق کنید که مجموعهٔ داده شده متعامد است:

الف) در $\mathbb{R}^3$، $S = \{(1, 1, -1)\}$

ب) در $\mathbb{R}^4$، $S = \{(1, 1, -1, 2)\}$

ج) در $\mathbb{R}^۴$، $S = \{(۲, ۰, ۱, -۱), (-۱, ۳, ۳, ۱)\}$

د) در $\mathbb{R}^۴$، $S = \{(۱, ۱, -۱, -۱), (۱, ۰, ۰, ۱), (۱, -۱, ۱, -۱)\}$

۱۴) فرض کنید P و ℓ، به‌ترتیب، یک نقطه و یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ هستند. نشان دهید حداقل فاصله P از نقاط ℓ برای نقطهٔ Q از ℓ به‌دست می‌آید که $Q - P$ بر ℓ عمود است. اگر خط ℓ را به‌صورت $< a; A >$ نمایش دهیم، نشان دهید $Q = a + \frac{(P-a).A}{|A|^۲}$.

۱۵) فرض کنید $n \geq ۳$، و $\ell_۱$ و $\ell_۲$ دو خط راست متنافر در $\mathbb{R}^n$ هستند. نشان دهید خط راست منحصر به‌فردی در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $\ell_۱$ و $\ell_۲$ را قطع می‌کند و بر هر دو عمود است.

۱۶) فرض کنید $\ell_۱$ و $\ell_۲$ دو خط راست متنافر در $\mathbb{R}^۴$ هستند.

الف) نشان دهید زیرفضای مستوی ۳ بُعدی منحصر به‌فردی در $\mathbb{R}^۴$ وجود دارد که شامل $\ell_۱$ و $\ell_۲$ است.

ب) نشان دهید صفحهٔ منحصر به‌فردی در $\mathbb{R}^۴$ وجود دارد که $\ell_۱$ و $\ell_۲$ را قطع می‌کند و بر هر دو عمود است (می‌توانید از نتیجهٔ تمرین ۱۵ استفاده کنید).

ج) در قسمت (ب) وقتی $\ell_۱$ محور $x_۱$ و $\ell_۲$ خط راست $\frac{x_۱+۱}{۲} = \frac{x_۲-۳}{۱} = \frac{x_۳}{۱} = \frac{x_۴}{۱}$ باشد، صفحهٔ ذکر شده را پیدا کنید.