تمرین ریاضی عمومی II **نیمسال دوم ۸۲–۸۱** **بخش‌های ۲ و ۳ (زیرفضاهای مستوی)**

۱) در هر مورد تحقیق کنید مجموعهٔ داده شده مستقل خطی است یا وابسته خطی:

الف) در $\mathbb{R}^3$ مجموعهٔ $\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

ب) در $\mathbb{R}^4$ مجموعهٔ $\{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$.

ج) در $\mathbb{R}^4$ مجموعهٔ $\{(0,3,1,1),(2,1,1,0),(1,-1,0,2)\}$.

د) در $\mathbb{R}^n$ مجموعهٔ $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_1+\cdots+\mathbf{e}_n\}$ که در آن $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ است.

۲) نشان دهید هر مجموعهٔ با بیش از n عضو متمایز در $\mathbb{R}^n$ وابستهٔ خطی است.

۳) $\{v_1,\dots,v_k\}$، $k\geq 3$، یک مجموعه عناصر $\mathbb{R}^n$ است با ویژگی‌های زیر:

الف) $\{v_1,\dots,v_{k-1}\}$ و $\{v_2,\dots,v_k\}$ هر یک وابستهٔ خطی هستند.

ب) $\{v_2,\dots,v_{k-1}\}$ مستقل خطی است.

نشان دهید هر زیرمجموعهٔ $(k-1)$ـ تایی از $\{v_1,\dots,v_k\}$ وابستهٔ خطی است.

۴) در فضای سه بعدی، دو صفحهٔ متمایز، نسبت به یکدیگر، فقط یکی از دو حالت موازی یا متقاطع را می‌توانند داشته باشند، و در حالت متقاطع، فصل مشترک آنها یک خط راست است. برای دو صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n>3$، روابط ممکن بین دو صفحه متنوع‌تر است. در زیر موارد گوناگون رابطهٔ دو صفحه در $\mathbb{R}^4$ آمده است. در هر مورد درباره وضعیت صفحهٔ داده شده با صفحهٔ

$$E=\{s(1,0,0,0)+t(0,1,0,0)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

ادعای ذکر شده را ثابت کنید:

الف) E با صفحهٔ $\{s(0,0,1,0)+t(0,0,0,1)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$ فقط یک نقطهٔ مشترک دارد.

ب) اشتراک E با صفحه $\{s(۰,۱,۰,۰)+t(۰,۰,۱,۰) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$ یک خط راست است.

ج) E با صفحهٔ $\{(۱,۱,۱,۱)+s(۵,۳,۰,۰)+t(-۱,۲,۰,۰) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$ موازی است.

د) E با صفحهٔ $\{(۰,۰,۱,۱)+s(۱,۰,۰,۰)+t(۰,۰,۰,۱) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$ متنافر است، یعنی دو صفحه نه موازی هستند و نه نقطهٔ مشترک دارند.

۵) نشان دهید هر صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n\geq ۳$، اجتماع یک دسته خطوط راست موازی است.

٦) نشان دهید اشتراک دو صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n\geq ۴$، اگر تهی نباشد، یک نقطه یا یک خط راست است.

۷) در $\mathbb{R}^۳$ محور z صفحه xy را قطع می‌کند. $\mathbb{R}^۳$ را به عنوان زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^۴$ متشکل از نقاط $(x,y,z,۰)$ در نظر بگیرید. نشان دهید در $\mathbb{R}^۴$ خط راستی به دلخواه نزدیک محور z وجود دارد که صفحه xy را قطع نمی‌کند.

۸) دایره‌های $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ در $\mathbb{R}^۳$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$C_۱$: دایرهٔ به مرکز $(۰,۱,۰)$ و شعاع ۱ در صفحه $x=۰$، $C_۲$: دایره به مرکز $(۲,۱,۰)$ و شعاع ۱ در صفحه $x=۲$، $C_۳$: دایرهٔ به مرکز $(۰,۰,۰)$ و شعاع ۱ در صفحه $z=۰$.

فرض کنید $\mathbb{R}^۳$ به صورت مجموعهٔ نقاط $(x,y,z,۰)$ در $\mathbb{R}^۴$ نشسته است. نشان دهید چگونه می‌توان دایرهٔ $C_۱$ را در $\mathbb{R}^۴$ حرکت داد و به وضعیت $C_۲$ منتقل کرد بدون این که در طول حرکت دایرهٔ $C_۳$ را قطع کند.

۹) فرض کنید $\pi_۱$ و $\pi_۲$ دو صفحه در $\mathbb{R}^۴$ باشند که اشتراک آنها یک تک نقطه است. نشان دهید هر صفحهٔ موازی با $\pi_۱$ نیز با $\pi_۲$ دقیقاً یک نقطه مشترک دارد.

۱۰) فرض کنید $\pi_۱$ و $\pi_۲$ دو صفحه در $\mathbb{R}^۴$ باشند که اشتراک آنها یک خط راست است. نشان دهید اشتراک هر صفحهٔ موازی با $\pi_۱$، با $\pi_۲$ یا یک خط راست یا تهی است.

۱۱) فرض کنید $\pi_۱$ و $\pi_۲$ دو صفحه در $\mathbb{R}^۴$ باشند که اشتراک آنها یک تک نقطه است. نشان دهید هیچ خط راست در $\pi_۱$ با هیچ خط راست در $\pi_۲$ موازی نیست.

۱۲) اگر $\pi_۱$ و $\pi_۲$ دو صفحهٔ متنافر در $\mathbb{R}^۴$ باشند، نشان دهید خط راستی $\ell_۱$ در $\pi_۱$ وجود دارد و خط راستی $\ell_۲$ در $\pi_۲$ که $\ell_۱$ و $\ell_۲$ موازی هستند. اگر به جای $\mathbb{R}^۴$، $\mathbb{R}^۵$ را در نظر بگیریم، آیا این حکم همچنان صادق می‌ماند؟