

تمرین ریاضی عمومی II نیمسال دوم ۸۲-۸۱ بخش‌های ۲ و ۳ (زیرفضاهای مستوی)

(۱) برای هر یک از دو حکم زیر یک اثبات حسابی - جبری و یک اثبات هندسی ارائه کنید.

$$\text{الف) } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{ب) } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(۲) در مورد تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر به صورت جبری و به صورت هندسی بحث کنید:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

(۳) نشان دهید دستگاه معادلات زیر یا بی‌نهایت جواب (x, y, z) دارد، یا فقط یک جواب، و یا اصلاً جواب ندارد، بسته به این که مقدار پارامتر p چه باشد:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = p \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

(۴) وضعیت نسبی (تقاطع، تنافر، توازی یا انطباق) زوج‌های زیر از خطوط راست را تعیین کنید:

$$\text{الف) در } \mathbb{R}^3: \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ و } \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$$

$$\text{ب) در } \mathbb{R}^4: \frac{x_1-5}{3} = \frac{x_2-5}{2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4+1}{-1} \text{ و } \frac{x_1-2}{4} = \frac{x_2-3}{1} = \frac{x_3+1}{2} = \frac{x_4}{-4}$$

$$\text{ج) در } \mathbb{R}^4: \frac{x_1+2}{6} = \frac{x_2-1}{1} = \frac{x_3-1}{-1} = \frac{x_4-2}{2} \text{ و } \frac{x_1}{-2} = \frac{x_2+1}{0} = \frac{x_3-1}{1} = \frac{x_4}{-4}$$

(۵) دو خط راست زیر را در \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید:

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3 + 1}{-1}, \quad \frac{x_1 + 1}{A} = \frac{x_2 + 2}{B} = \frac{x_3}{C}$$

الف) آیا می‌توان (A, B, C) را طوری تعیین کرد که دو خط فوق منطبق باشند؟

ب) نشان دهید مجموعه انتخاب‌های (A, B, C) که به‌ازای آن دو خط فوق موازی‌اند یک خط راست گذرا از مبدأ در فضای سه‌بعدی (A, B, C) تشکیل می‌دهد که از آن مبدأ حذف شده است.

ج) برای چه انتخاب‌هایی از (A, B, C) دو خط فوق متقاطعند؟ نشان دهید مجموعه این انتخاب‌ها یک صفحه گذرا از مبدأ در فضای سه‌بعدی (A, B, C) تشکیل می‌دهد که از آن مبدأ حذف شده است.

۶) دو خط زیر را در \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید:

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3}{-1}, \quad \frac{x_1 - a}{0} = \frac{x_2 - b}{2} = \frac{x_3 - c}{1}$$

نشان دهید مجموعه مقادیر (a, b, c) که به‌ازای آن دو خط نقطه مشترک دارند یک صفحه در فضای سه‌بعدی (a, b, c) تشکیل می‌دهد.