



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری سیزدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} X$ را در نظر بگیرید.

(الف) با حذف یک متغیر یک معادله مرتبه دوم به دست آورید.

(ب) معادله مرتبه دوم قسمت قبل را بصورت دستگاه مرتبه اول بنویسید. این همان دستگاه ابتدای سوال نیست اما نشان دهید می توان با یک تغییر مختصات به دستگاه اول تبدیل کرد.

۲. ثابت کنید رانسکین دو مجموعه اساسی از جواب های دستگاه $X' = P(t)X$ ضربی ثابت از هم هستند.

۳. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید و رفتار جواب را وقتی $t \rightarrow \infty$ تشریح کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۴. (الف) نشان دهید مقادیر ویژه ماتریس A^n برابر توان n ام مقادیر ویژه ماتریس A است.

(ب) نشان دهید ماتریس های A و $T^{-1}AT$ دارای چند جمله ای مشخصه یکسان هستند.

۵. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} X$$

۶. سه جواب دستگاه $\dot{X} = AX$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

مطلوب است مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر آن را برای ماتریس A بیابید.

۷. همه بردارهای X را تعیین کنید بطوریکه جواب‌های مساله مقدار اولیه زیر تابعی تناوبی نسبت به متغیر t باشند.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -2 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} X, \quad X(\cdot) = X.$$

۸. به فرض $x(t) = e^{\lambda t}v$ جواب دستگاه $\dot{X} = AX$ باشد که در آن λ یک عدد مختلط غیرحقیقی است. ثابت کنید $y(t) = \text{Re}\{x(t)\}$ و $z(t) = \text{Im}\{x(t)\}$ دو جواب مستقل خطی دستگاه هستند.

۹. جواب اساسی دستگاه معادلات زیر را محاسبه کنید.

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} X$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{bmatrix} \text{ به فرض } 10.$$

الف) نشان دهید $A^2 = -I$.

ب) با استفاده از قسمت قبل نشان دهید:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

۱۱. ماتریس A را پیدا کنید اگر

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

۱۲. به فرض $\phi^j(t)$ جواب مساله مقدار اولیه

$$\dot{X} = AX, \quad X(\cdot) = e^j$$

باشد. نشان دهید $e^{At} = (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n)$.