



درس معادلات دیفرانسیل  
نیم سال اول ۰۴-۰۵  
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری دوازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. الف) معادله دیفرانسیل  $ay'' + by' + cy = f(t)$  را در نظر بگیرید. می‌توانیم جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$  بنویسیم که در آن:

$$Y(s) = y(\cdot)\Phi(s) + y'(\cdot)\Psi(s) + G(s)$$

است. مطلوبست توابع  $\Phi(s)$ ,  $\Psi(s)$  و  $G(s)$  را محاسبه کنید. همچنین می‌توانیم با قرار دادن

$$f(t) = \cdot, y(\cdot) = 1, y'(\cdot) = \cdot$$

یک جواب همگن  $y_1(t)$  به دست بیاوریم و بار دیگر مقادیر

$$f(t) = \cdot, y(\cdot) = \cdot, y'(\cdot) = 1$$

را قرار می‌دهیم و جواب دیگری مانند  $y_2(t)$  به دست می‌آوریم که نسبت به جواب اول مستقل خطی است. حال یک جواب خاص را با در نظر گرفتن  $y(\cdot) = y'(\cdot) = \cdot$  در فرمول  $Y(s)$  به دست می‌آوریم که این جواب خاص برابر  $\frac{y_2(t)}{a} * f(t)$  است.

ب) جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از روش قسمت قبل به دست آورید:

$$y'' + 4y' + 4y = 2t, \quad y(\cdot) = 2, y'(\cdot) = -3$$

۲. جواب مساله‌های مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } y'' + 2y' + 3y = \sin(t) + \delta(t - 3\pi), \quad y(\cdot) = \cdot, \quad y'(\cdot) = \cdot$$

$$\text{ب) } y'' + y = \delta(t - 2\pi) \cos(t), \quad y(\cdot) = \cdot, \quad y'(\cdot) = 1$$

۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y^{(3)} + y - 1 = \int_0^t \sin(t-x)y(x)dx, \quad t > \cdot$$

$$y(\cdot) = y''(\cdot) = 1, \quad y'(\cdot) = \cdot$$

۴. الف) نشان دهید اگر  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ ، آنگاه:  $\frac{F(s)}{s} = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\theta) d\theta\right)$ .  
 ب) با استفاده از رابطه به دست آمده لاپلاس وارون  $\frac{1}{s(s^2+1)}$  را محاسبه کنید.

۵. الف) فرض کنید عدد ثابتی مانند  $T$  داریم که رابطه  $f(t+T) = f(t)$  برای تابع  $f$  و هر  $t$  برقرار است.  $f$  را متناوب با دوره تناوب  $T$  می‌نامیم. نشان دهید:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

ب) به وسیله قسمت قبل لاپلاس توابع  $f(t) = t - [t]$  و  $g(t) = |\sin t|$  را محاسبه کنید.

۶. معادله دیفرانسیل زیر را به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید

$$y'' - 3ty' + (1 - t^2)y = \cos(t)$$