

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده

تمرین سری یازدهم
دانشکده علوم ریاضی

در تمرین‌های ۱ تا ۴، میدان برداری صفحه‌ای داده‌شده را رسم کرده و خطوط میدان آن را مشخص کنید.

۱. $\vec{F}(x, y) = y\hat{i} + x\hat{j}$

۲. $\checkmark \vec{F}(x, y) = e^x\hat{i} + e^{-x}\hat{j}$

۳. $\vec{F}(x, y) = \nabla(x^2 - y)$

۴. $\checkmark \vec{F}(x, y) = \cos y\hat{i} - \cos x\hat{j}$

در تمرین‌های ۵ تا ۸، مشخص کنید که آیا میدان برداری داده‌شده پایستار است و در صورت امکان تابع پتانسیل را بیابید.

۵. $\checkmark \vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} - 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$

۶. $\checkmark \vec{F}(x, y, z) = (2xy - z^2)\hat{i} + (2yz + x^2)\hat{j} - (2zx - y^2)\hat{k}$

۷. $\vec{F}(x, y) = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2}$

۸. $\vec{F}(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}(xz\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k})$

۹. انتگرال خطی داده‌شده را بر روی مسیر مشخص شده C محاسبه کنید: $\checkmark$

$$\int_C y \, ds, \quad \text{که } \vec{r} = t^2\hat{i} + t\hat{j} + t^2\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq m.$$

۱۰. گشتاور لختی نسبت به محور z را بیابید (یعنی مقدار

$$\delta \int_C (x^2 + y^2) \, ds$$

را بیابید) برای سیمی با چگالی ثابت δ که روی منحنی

$$\mathbf{r} = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

قرار دارد. $\checkmark$

۱۱. مقدار

$$\int_C x \, ds$$

را در قسمت اکتانت اول از منحنی تقاطع استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $z = x$ بیابید. $\checkmark$

۱۲. مقدار

$$\int_C xyz \, ds$$

را به صورت یک انتگرال معین بیان کنید، ولی آن را محاسبه نکنید. در اینجا C منحنی تعریف شده با معادلات $y = x^2$ و $z = y^2$ است، که از نقطه $(0, 0, 0)$ تا $(2, 4, 16)$ کشیده شده است. ✓

۱۳. میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

را در امتداد منحنی از نقطه $(-1, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ ، در هر دو جهت، که منحنی تقاطع استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = y$ است، انتگرال گیری کنید.

۱۴. میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z) \mathbf{i} + (y - z) \mathbf{j} - (x + y) \mathbf{k}$$

را در امتداد مسیر چندضلعی از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ انتگرال گیری کنید. ✓

۱۵. مقدار انتگرال بسته زیر را در جهت پادساعتگرد حول مربعی با رأس های $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ و $(0, 1)$ بیابید: ✓

$$\oint_C x^2 y^2 \, dx + x^2 y \, dy$$

۱۶. مقادیر A و B را طوری بیابید که میدان برداری

$$\mathbf{F} = Ax \ln z \mathbf{i} + By^2 z \mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3 \right) \mathbf{k}$$

پیستار باشد. اگر C خط راست از نقطه $(1, 1, 1)$ تا $(2, 1, 2)$ باشد، مقدار انتگرال زیر را بیابید: ✓

$$\int_C 2x \ln z \, dx + 2y^2 z \, dy + y^3 \, dz$$

توجه: در کلاس حل تمرین، فقط سوالاتی که جلوی آنها تیک قرمز ✓ زده شده حل می شوند.