

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده

تمرین سری دهم
دانشکده علوم ریاضی

۱. حجم ناحیه بین پارابولئیدهای $z = 1 - x^2 - y^2$ و $z = 2(x^2 + y^2 - 1)$ را بیابید. ✓

۲. حجم ناحیه‌ای که بالای صفحه‌ی xy ، زیر پارابولئید $z = 1 - x^2 - y^2$ و در داخل $\sqrt{3}x \leq y \leq -x$ قرار دارد را محاسبه کنید.

۳. در اُکتان اول، بین صفحات $y = 0$ و $y = x$ ، و درون بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ حجم ناحیه را پیدا کنید. ✓

۴. حجم ناحیه محدود شده توسط هایپربولئید $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ و صفحات $z = c$ و $z = -c$ را بیابید.
مقدار انتگرال سه‌گانه را بیابید: ✓

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

که در آن R استوانه‌ای است با شرایط:

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq h.$$

۵. مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$\iiint_R z dV,$$

که در آن ناحیه‌ی R به صورت زیر تعریف شده:

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

۶. نشان دهید که معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر است: ✓

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\cot \phi}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

۷. فرض کنید D کوچکتر از دو ناحیهٔ صلب محصور بین دو سطح زیر باشد:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2,$$

که در آن a یک ثابت مثبت است. مقدار زیر را بیابید: ✓

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dV.$$

برای محاسبه‌ی مساحت سطوح مشخص شده در تمرین‌های ۸ تا ۱۲، از انتگرال‌های دوگانه استفاده کنید:

۸. بخشی از صفحه‌ی $z = 2x + 2y$ که درون استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. ✓

۹. نیم‌کره‌ی $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ✓

۱۰. سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ در ربع اول فضا (اکتانت اول)

۱۱. بخشی از سطح $z = y^2$ که بالای مثلی با رأس‌های $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ قرار دارد.

۱۲. بخشی از سطح استوانه‌ای $x^2 + z^2 = 4$ که بالای ناحیه‌ی $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 2$ قرار دارد. ✓

۱۳. نشان دهید که بخش‌هایی از سطوح $z = 2xy$ و $z = x^2 + y^2$ که درون یک استوانه‌ی عمودی یکسان قرار دارند، دارای مساحت مساوی هستند. ✓

توجه: در کلاس حل تمرین، فقط سوالاتی که جلوی آنها تیک قرمز ✓ زده شده حل می‌شوند.