

(پاییز ۱۴۰۴)

ریاضی عمومی ۱

تمرین سری نهم

تمرین ۱

انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید:

(آ) $\int \cos^2 x \, dx$

(ب) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

(ج) $\int (\sin^{-1} x)^2 \, dx$

(د) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-a^2}$

(ه) $\int \frac{dx}{e^2 x - 4e^x + 4}$

(و) $\int \frac{dx}{3+2 \cos x}$

(ز) $\int \ln(x^2 - x + 2) \, dx$

تمرین ۲

حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(آ) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(ب) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{4+x^2}$

(ج) $\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

(د) $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x \, dx$

(ه) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$

(و) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\sin^{-1} x}{x^2} \, dx$

تمرین ۳

همگرایی انتگرال‌های داده شده را بررسی کنید و در صورت همگرا بودن، مقدار انتگرال را به دست آورید.

(آ) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{xe^x}$

(ب) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \ln x}$

(ج) $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

(د) $\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1 - \cos \sqrt{x}}$

تمرین ۴

مشتقات خواسته شده در قسمت‌های زیر را محاسبه کنید.

(آ) $\frac{d}{d\theta} \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \frac{1}{1-x^2} dx$

(ب) $\frac{d}{dx} \left(x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u} du \right)$

(ج) $\frac{d}{dx} F(\sqrt{x})$ ، که در آن $F(t) = \int_0^t \cos(x^2) dx$

تمرین ۵

اگر f تابعی دو بار مشتق‌پذیر روی بازه $[a, b]$ باشد و $f(a) = f(b) = 0$ ، نشان دهید:

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x) dx = -2 \int_a^b f(x) dx.$$

تمرین ۶

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

(آ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^5 \right)$

تمرین ۷

یک فرمول بازگشتی برای $I_n = \int \sin^n x dx$ ، $n \geq 2$ ، بدست آورید. سپس با استفاده از آن، حاصل I_6 و I_7 را محاسبه کنید.