

تمرین سری هشتم

تمرین ۱

فرض کنید f تابعی پیوسته و غیر کاهشی روی بازه $[a, b]$ است. P_n را افراز بازه $[a, b]$ به n بخش با طول برابر در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

سپس، نتیجه بگیرید f روی بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر است.

تمرین ۲

P_n را افراز بازه $[a, b]$ به n بخش با طول برابر در نظر بگیرید. برای تابع f و بازه $[a, b]$ داده شده، $U(f, P_n)$ و $L(f, P_n)$ را حساب کنید. سپس بررسی کنید که تابع f بر بازه $[a, b]$ داده شده انتگرال پذیر است یا خیر؟

الف) $[a, b] = [0, 2]$, $f(x) = 1 - x$

ب) $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^3$

ج) $[a, b] = [0, 3]$, $f(x) = e^x$

تمرین ۳

فرض کنید

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

افرازی از $[a, b]$ بوده و P' تقریفی از P باشد که نقطه‌ی x' را بیشتر دارد، به طوری که، مثلاً برای برخی $1 \leq i \leq n$ ، $x_{i-1} < x' < x_i$ ، نشان دهید که به ازای هر تابع پیوسته f ، داریم:

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, P).$$

تمرین سری هشتم

تمرین ۴

انتگرال‌های زیر را با استفاده از خواص انتگرال معین و تعبیر انتگرال‌ها به صورت مساحت حساب کنید.

(آ) $\int_{-a}^a (a - |s|) \, ds$

(ب) $\int_{-\sqrt{2}}^0 \sqrt{2 - x^2} \, dx$

(ج) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x - e^{-x}) \, dx$

(د) $\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$

(ه) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \operatorname{sgn}(x - 1) \, dx$

تمرین ۵

فرض کنید $a < b$ و f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. ثابت k را چنان بیابید که انتگرال $\int_a^b (f(x) - k)^2 \, dx$ مینیمم باشد.

تمرین ۶

فرض کنید $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته هستند و به ازای هر $x \in [a, b]$ داریم: $g(x) > 0$. ثابت کنید مقدار $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که:

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx.$$

تمرین ۷

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(آ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} \, dx$

(ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin x} \, dx$

تمرین ۸

مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = x^3$ و خط مماس بر این منحنی در نقطه $(1, 1)$ را محاسبه کنید.

برای تابع پیوسته f در بازه $[0, 1]$ نشان دهید:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \, dx.$$