

تمرین سری چهارم

مدرس: دکتر امیر دانشگر

تمرین ۱

در این سوال قصد داریم معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + u + x - y + 2 = 0 \quad (۱.۰)$$

که شامل منحنی پارامتری شده $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $C(s) = (x(s), y(s), u(s)) = (s, 0, s)$ باشد را حل کنیم.

(آ) جواب عمومی معادله موج مرتبه اول

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

را بدست آورده و تحقیق کنید که تابع $v = f(x + y)$ که در f تابع دلخواه مشتق پذیر باشد در معادله موج صدق می کند.

(ب) با استفاده از تغییر متغیر $\eta = x + y$ و $\theta = x - y$ معادله ۱.۰ را بازنویسی کنید.

(ج) با استفاده از جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}\theta - 1$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه ۱.۰ را بدست آورید.

تمرین ۲

معادله موج به صورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۲.۰)$$

را در نظر بگیرید و به سوال های زیر پاسخ دهید.

تمرین سری چهارم

(آ) برای c مناسب نشان دهید توابع $u = x^2 + t^2$ و $u = \sin(at) \sin(bx)$ در معادله ۲.۰ صدق می‌کنند.

(ب) تحقیق کنید

$$u(x, t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct) \quad (۳.۰)$$

برای هر تابع دوبار مشتق‌پذیر Φ و Ψ در معادله ۲.۰ صدق می‌کند. آیا توابع قسمت اول را به فرم ۳.۰ میتوان نوشت؟

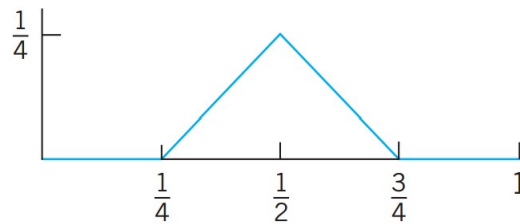
تمرین ۳

مسائل مقدار اولیه-مقدار مرزی سیم‌های مرتعش زیر را حل کنید.

(آ)

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

که ضابطه تابع $f(x)$ در شکل نشان داده شده است.



(ب)

$$\begin{cases} 25u_{xx} = u_{tt} & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x - e^x, \quad u_t(x, 0) = \pi & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(ج)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u = xt, & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

تمرین سری چهارم

د) با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} = 1 \circ \circ u_{tt} + 1 \circ \circ u_t + 2u, & t \geq 0, \quad x \geq 0 \\ u(0, t) = \sin(t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 & x \geq 0. \end{cases}$$

ه) با استفاده از تبدیل فوریه معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + u, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

تمرین ۴

معادله گرما برای مقادیر مرزی-مقادیر اولیه داده شده زیر را حل کنید.

(آ)

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

ب) اگر H یک ثابت مثبت باشد،

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + H & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \cos(x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

ج) اگر K یک ثابت مثبت باشد،

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} K & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1. \end{cases} \end{cases}$$