



درس ریاضی عمومی ۲
نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری یازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. انتگرال $\iint_P (x^2 + y^2) dA$ را محاسبه کنید که در آن ناحیه P متوازی الاضلاعی است که با خطوط $x + y = 1$ ، $x + y = 2$ ، $3x + 4y = 5$ و $3x + 4y = 6$ کران‌دار شده است.

۲. حجم ناحیه‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) ناحیه داخل مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(ب) ناحیه مابین دو سهمی $z = 10 - x^2 - y^2$ و $z = 2(x^2 + y^2 - 1)$.

(ج) ناحیه واقع شده در یک هشتم اول و مابین صفحات $y = 0$ و $y = x$ و داخل بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

۳. جرم سیمی که در امتداد خم $r(t) = 3ti + 3t^2j + 2t^3k$ قرار دارد که در آن $0 < t \leq 1$ و چگالی سیم از فرمول $r(t) = 1 + t$ بر حسب گرم بر واحد طول پیروی می‌کند، بیابید.

۴. انتگرال $\int_C \sqrt{1 + 4x^2z^2} ds$ را بیابید که در آن خم C اشتراک دو رویه $x^2 + z^2 = 1$ و $y = x^2$ است.

۵. کار انجام شده توسط میدان برداری را روی خم داده شده در هر قسمت محاسبه کنید.

(الف) میدان $F(x, y) = xyi - x^2j$ در راستای $y = x^2$ از نقطه $(0, 0)$ به نقطه $(1, 1)$

(ب) میدان $F(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$ از نقطه $(-1, 0, 0)$ به نقطه $(1, 0, 0)$ در راستای خم اشتراک رویه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = y$

۶. مقدار

$$\int e^{x+y} \sin(y+z) dx + e^{x+y} (\sin(y+z) + \cos(y+z)) dy + e^{x+y} \cos(y+z) dz$$

روی خط راست از نقطه $(0, 0, 0)$ به نقطه $(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ محاسبه کنید.

۷. ماتریس متقارن $A_{n \times n}$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم $X^T = (x_1, \dots, x_n)$.

(الف) مطلوبست محاسبه مقدار کمینه و نقطه کمینه گر تابع $f(X) = X^T A X$ با قید $g(X) = |X|^2 - 1 = 0$.

توجه: میدانیم که سطح تراز یادشده در قید، یک ناحیه کراندار و بسته است و می‌پذیریم که مساله بهینه سازی مذکور دارای حداقل یک جواب است و آن را با X_1 نشان می‌دهیم. همچنین ملاحظه کنید که $A X_1 = \lambda_1 X_1$.

ب) مطلوبست محاسبه مقدار کمینه و نقطه کمینه گر تابع $f(X) = X^T A X$ با قیدهای $g(X) = |X|^2 - 1 = 0$ و $g_1(X) = X \cdot X_1 = 0$. مانند قسمت قبل جواب وجود دارد و آن را با X_2 نشان میدهیم. همچنین ملاحظه کنید که $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

ج) با ادامه روند یاد شده در قسمتهای قبل، نشان دهید برای ماتریس متقارن A ، مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (نه لزوما متفاوت با یکدیگر) متناظر با بردارهای ویژه $X_1, \dots, X_n$ وجود دارند به طوری که این بردارها دو به دو برهم عمود هستند و طول همگی برابر یک است.

د) تعریف کنید $P_{n \times n} = [X_1 \dots X_n]$ و $D_{n \times n}$ ماتریس قطری که $D_{ii} = \lambda_i$. نشان دهید که $AP = PD$ و $P^T = P^{-1}$.

ه) فرض کنید که برای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم $\sqrt{D_{n \times n}} \cdot \lambda_i \geq 0$ را ماتریس قطری بگیریید که $\sqrt{D_{ii}} = \sqrt{\lambda_i}$. تعریف کنید $\sqrt{A} = P \sqrt{D} P^T$. نشان دهید که $(\sqrt{A})^T = \sqrt{A}$ ، $\sqrt{A} \sqrt{A} = A$.

و) نشان دهید برای هر ماتریس متقارن A که تمام مقادیر ویژه اش نامنفی باشند،

$$X^T A X = X^T (\sqrt{A})^T \sqrt{A} X = (\sqrt{A} X)^T (\sqrt{A} X) = |\sqrt{A} X|^2$$

۸. حجم بیضی گون $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = 1$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: با استفاده از تمرین قبل ابتدا تغییر متغیر $Y = CX$ را معرفی کنید که داشته باشیم

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = |CX|^2.$$

سپس با کمک گرفتن از آن و قضیه تغییر متغیر، حجم بیضی گون مورد نظر را محاسبه کنید.

۹. مطلوبست محاسبه حجم ناحیه کراندار و محصور به هر دو رویه از رویه های ذیل. اگر برای زوجی از این رویه ها، چنین ناحیه ای وجود نداشت، آن زوج رویه را معرفی و دلیل عدم وجود ناحیه کراندار جهت محاسبه حجم را بیان کنید.

نام هر کدام از این رویه ها چیست؟ اگر از روش تغییر متغیر برای محاسبه حجم استفاده میکنید، تغییر متغیر خود را معرفی کنید.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3xz = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = 5$$

۱۰. مقدار انتگرال $\frac{1}{4\pi} \oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ را در هر قسمت روی داده شده محاسبه کنید.

الف) در جهت عقربه های ساعت و روی مربعی با راس های $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ و $(1, -1)$

ب) در خلاف جهت عقربه های ساعت روی مرز ناحیه $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ و $y \geq 0$

۱۱. مقدار انتگرال $\iint_S x dS$ بر روی قسمتی از استوانه سهمی $z = \frac{x^2}{4}$ که درون یک هشتم اول استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار می گیرد محاسبه کنید.

۱۲. مساحت قسمتی از استوانه $2ay = x^2 + y^2$ را که خارج از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ قرار می گیرد محاسبه کنید.

۱۳. شار میدان برداری $F = yi + zk$ به سمت بیرون گذرنده از مرز مخروط توپر $1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 0$ را به دست آورید.