



درس ریاضی عمومی ۲
نیم سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری سوم

دانشکده علوم ریاضی

۱. ذره P روی اشتراک استوانه $z = x^2$ و صفحه $x + y = 2$ در جهت افزایش y با تندی ثابت ۳ حرکت می‌کند. بردار سرعت این ذره را هنگامی که $P = (1, 1, 1)$ است محاسبه کنید.

۲. ذره‌ای در امتداد منحنی $r = 3u^2i + 2u^2j + 2u^2k$ در جهت افزایش u و با تندی ثابت ۶ حرکت می‌کند. سرعت و شتاب ذره را وقتی که در نقطه $(3, 3, 2)$ است بیابید.

۳. به فرض $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ مسیر حرکت جسمی روی کره‌ای به شعاع r و مرکز مبدا مختصات باشد بطوریکه $\|\gamma'(t)\| = 1$. نشان دهید جهت بردار شتاب همواره سمت داخل کره است و $\|\gamma''(t)\| \geq \frac{1}{r}$.

۴. فرض کنید $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ خمی باشد که از مبدا مختصات عبور نمی‌کند. اگر تابع $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$ تساوی $\gamma''(t) = a(t)\gamma(t)$ برقرار باشد. نشان دهید تصویر $\gamma(t)$ در یک صفحه قرار دارد.

۵. اشتراک دایره $x^2 + y^2 = a^2$ با ربع اول را طبق خواسته هر قسمت پارامتری کنید.

(الف) بر حسب پارامتر y و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

(ب) بر حسب زاویه بین خط گذرنده از هر نقطه و قسمت مثبت محور x ها و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

(ج) پارامتری بر اساس طول خم با شروع از نقطه $(0, a)$ و در جهت عقربه‌های ساعت

۶. اشتراک صفحه $z = 1 + x$ با مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ سهموی است. این سهموی را به سه روش پارامتری کنید. (هر بار هرکدام از متغیرها را برابر t بگیرید). کدام یک از این انتخاب‌ها برای t منجر به پارامتری سازی می‌شود که نمایانگر کل سهموی است؟ آن پارامتری سازی چیست؟ چه اتفاقی برای دو انتخاب دیگر می‌افتد؟

۷. برای کدام مقادیر از λ طول $s(T)$ که بیانگر طول خم $0 \leq t \leq T, r(t)$ می‌باشد برابر $s(T) = T + T^3$ می‌شود؟

$$r(t) = t\mathbf{i} + \lambda t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

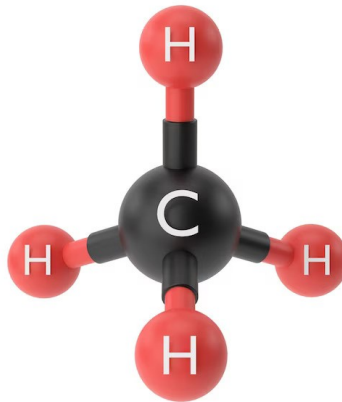
۱. در هر قسمت گزاره خواسته شده را با استفاده از بردارها اثبات کنید.

(الف) ثابت کنید در هر مثلث ارتفاعها همرسند.

(ب) ثابت کنید در هر مثلث میانهها همرسند و نقطه تقاطع میانه، را به نسبت ۱ به ۲ جدا می‌کند.

(ج) ثابت کنید در یک هرم که هر وجه آن مثلث است، خط واصل از هر راس به مرکز ثقل (محل برخورد میانهها) مثلث روبرو همرسند و این نقطه تلاقی، خط واصل را به نسبت ۱ به ۳ جدا می‌کند.

(د) فرض کنید که می‌دانیم در مولکول CH_4 هر دو مولکول هیدروژن با هم زاویه برابر می‌سازند. کوسینوس این زاویه را محاسبه کنید.



۲. (الف) دستگاه $Ax = b$ را حل کنید که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ است.

(ب) ستون سوم ماتریس A را با بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ جایگزین می‌کنیم. همه بردارهای b را بیابید که دستگاه برای آن‌ها جواب دارد. برای تمام این بردارها بررسی کنید که دستگاه چند جواب دارد.

(ج) سطر سوم ماتریس A را با بردار $(3, 3, 0)$ جایگزین می‌کنیم. همه بردارهای b را بیابید که دستگاه برای آن‌ها جواب دارد. برای تمام این بردارها بررسی کنید که دستگاه چند جواب دارد.

(د) آیا میان بردارهای b به دست آمده در دو قسمت قبل ارتباطی وجود دارد؟ توضیح دهید.