به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۲ (نیمسال تحصیلی ۱۴۰۳۱)

شنبه ۶ بهمن ۱۴۰۳ - ساعت ۱۵ مدت امتحان: ۳ و نیم ساعت

- **سوالات در یک برگه دو رو تنظیم شده است.**
- **استفاده از ماشین حساب یا رایانه، به هیچ وجه مجاز نیست.**
- **جمع بارم سوالات ۱۴۰ نمره است.**
- **می‌توانید از اتحادهای کلاسیک آنالیز برداری با ذکر آن اتحاد استفاده کنید و نیازی به اثبات کردن اتحاد مورد نظرتان نیست.**
- **بردارهای** $a = (1, 1, 1)$ **و** $X = (x, y, z)$ **و تابع**

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(X) := f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz - 4x - 4y - 4z - 2 \end{cases}$$

را درنظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید.

- **اگر قسمتی از راه حل یک سوال، بخشی از راه حل سوال دیگری نیز بود، می‌توانید به آن ارجاع دهید، ولی باید این ارجاع دادن کاملا مشخص و در پاسخنامه کادربندی شده باشد.**
- **توجه بسیار مهم: اگر در راه حل تان، از قضیه ی تغییر متغیر استفاده می‌کنید، حتما باید نگاشت تغییر متغیر خود را معرفی کنید. همچنین در هر قسمت از راه حل، باید به روشنی بیان کنید که از چه قضیه‌ای استفاده می‌کنید و لزوما بیان تساوی کافی نیست. برای مثال اگر برای نشان دادن یک برابری از قضیه گرین استفاده می‌کنید، باید بیان کنید که از این قضیه بهره برده اید و تساوی مورد نظر شما به دلیل برقراری شرایط قضیه گرین درست است.**

۱. فرض کنید R ناحیه ای در صفحه است و $g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و داریم

$$\iint_R g \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2\sqrt{2x}} g(x, y) \, dy dx.$$

الف) ناحیه R را ترسیم کنید. (۱۰ نمره)

ب) انتگرال را با تغییر ترتیب dy و dx بازنویسی کنید. (۱۰ نمره)

۲. منظور از C، خمی ست در مختصات قطبی با معادله $r = 1 + \cos\alpha$ برای $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.(۲۰ نمره)

$$\oint_C x\, dy$$

۳. میدان برداری و رویه ی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^3 - \{a, -a\} \to \mathbb{R}^3 \\ F(X) = \frac{X-a}{|X-a|^3} + \frac{X+a}{|X+a|^3} \qquad , \quad S_1 = \{X \mid f(X) = 0\} \end{cases}$$

وقتی منظور از N، بردار یکه برون سو بر رویه ی S_1 باشد، مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

$$\oiint_{S_1} F.N\, dS$$

راهنمایی: برای $X_0 \in \mathbb{R}^3$ دلخواه و ثابت، نشان دهید میدان برداری $\frac{X-X_0}{|X-X_0|^3}$ سلونوئیدی است، به عبارت دیگر نشان دهید $\operatorname{div}\left(\frac{X-X_0}{|X-X_0|^3}\right) = 0$.

۴. میدان برداری و رویه ی مرزدار زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad S_2 = \{X \mid f(X) = 0\,,\ X.a \geq 0\} \\ G(X) = a \end{cases}$$

وقتی بردار N بر هر نقطه ی S_2، مساوی بردار N بر همان نقطه از S_1 در سوال ۳ باشد، مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید.(۲۰ نمره)

$$\iint_{S_2} G.N\, dS$$

راهنمایی: در مورد $\nabla \times (X \times a)$ چه می‌توان گفت؟

۵. مقادیر زیر را محاسبه کنید. می توانید فرمولهای مربوط به حجم و سطح شکلهای معروف را به کار ببرید، ولی در این صورت ابتدا باید با ذکر دلیل نشان دهید که شکل مورد نظر چیست و صرف اشاره کردن کفایت نمی کند.

الف) حجم ناحیه ی $V = \{X \mid f(X) \leq 0\}$. (۲۰ نمره)

ب) سطح رویه ی $S = \{X \mid f(X) = 0\}$. (۲۰ نمره)

۶. آیا هر میدان برداری مانند $F : \mathbb{R}^3 - \{ta \mid t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ که غیر دورانی باشد، یعنی

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3 - \{ta \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (\operatorname{curl} F)(X) = (\nabla \times F)(X) = \vec{0}$$

حتما پایستار یا همان میدان بقا است؟ اگر بلی دلیل خود را ارائه کنید و اگر خیر، مثال نقضی بیاورید و نشان دهید که چنین نیست. (۲۰ نمره)

راهنمایی: می توانید همین مساله را در $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ و در گام بعدی برای $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ بررسی کنید. سپس با ایده گرفتن از این دو و استفاده از یک تغییر متغیر مناسب، مساله را برای $\mathbb{R}^3 - \{ta \mid t \in \mathbb{R}\}$ حل کنید.

موفق باشید