دانشکده‌ی علوم ریاضی

اساتید درس: آقای دکتر محسن جمالی و خانم دکتر سحر قاجار نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

تمرینهای سری نهم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

تابع گاما به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p dx, \quad p > -1$$

۱) نشان دهید که:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

۲) نشان دهید

$$\mathcal{L}(t^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0 \quad p > -1$$

۳) نشان دهید برای n صحیح و مثبت

$$\Gamma(n+1) = n!$$

و مقدار $\mathcal{L}(t^n)$ را بدست آورید.

۴) نشان دهید:

$$\mathcal{L}(t^{-1/2}) = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx, \quad s > 0$$

۵) اگر بدانیم $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، $\mathcal{L}(t^{-1/2})$ را محاسبه کنید و نشان دهید که

$$\mathcal{L}(t^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}, \quad s > 0$$

۲ پرسش دوم

فرض کنید

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

نشان دهید $\mathcal{L}(f(t)) = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$.

۳ پرسش سوم

نشان دهید اگر $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$، آنگاه $\mathcal{L}(\int_0^t f(\theta)d\theta) = \frac{F(s)}{s}$. سپس بوسیله آن $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2+1)})$ را محاسبه کنید.

۴ پرسش چهارم

نشان دهید $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(s)ds$ و بوسیله آن انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt, \quad a,b>0$$

۵ پرسش پنجم

بدون انتگرال گیری $\mathcal{L}(\sin^2 at)$ و $\mathcal{L}(\cos^2 at)$ را بدست آورید.

۶ پرسش ششم

فرض کنید عدد ثابتی مانند T داریم که f در $f(t+T) = f(t)$ برای هر $t>0$ صدق می کند. f را متناوب با دوره تناوب T می نامیم. نشان دهید که

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

و بوسیله آن لاپلاس $f(t) = t - [t]$ و $f(t) = |\sin t|$ را حساب کنید.

۷ پرسش هفتم

$\mathcal{L}^{-1}(\ln \frac{s^2+4s}{s^2+9})$ و $\mathcal{L}^{-1}(e^{-s}\ln(s(s+1)(s+2)))$ را محاسبه کنید.

۸ پرسش هشتم

مسایل مقدار اولیه زیر را با کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

۱) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$

۲) $ty'' + (1-t)y' + y = 0, \quad y(0) = -2$

۳) $y'' + 4y = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$