



دانشکده‌ی علوم ریاضی

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

اساتید درس: آقای دکتر محسن جمالی و خانم دکتر سحر قاجار

تمرینهای سری هفتم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

(آ) فرض کنید $\{y_1, y_2, y_3\}$ یک مجموعه اساسی جواب برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه سوم زیر است.

$$y''' + p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$$

دستگاه معادلات خطی مرتبه اول خطی زیر را از روی آن می‌سازیم.

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

$$x'_3 = -p(t)x_3 - q(t)x_2 - r(t)x_1$$

نشان دهید اگر $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}\}$ یک مجموعه اساسی جواب برای دستگاه فوق باشد، آنگاه داریم:

$$W[y_1, y_2, y_3] = cW[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}]$$

(ب) فرض کنید:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ابتدا رونسکین این سه بردار را بدست آورید. سپس یک دستگاه معادلات خطی بنویسید که این سه بردار یک مجموعه اساسی جواب برای آن باشند.

۲ پرسش دوم

(آ) برای دستگاههای معادلات خطی زیر جواب عمومی حقیقی را بدست آورید. $\Psi(t)$ و همچنین $\Phi(t)$ که در آن $\Phi(0) = \mathbf{0}$ را محاسبه کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

(ب) مسایل مقدار اولیه زیر را حل کنید:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۳ پرسش سوم

نشان دهید اگر A یک ماتریس قطری باشد که روی قطر آن به ترتیب a_1, a_2, \dots, a_n ظاهر شود، $\exp(\mathbf{A}t)$ نیز ماتریسی هست که روی قطر آن به ترتیب $\exp(a_1t), \exp(a_2t), \dots, \exp(a_nt)$ ظاهر می شود.

۴ پرسش چهارم

ماتریس متقارن زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به متن کتاب و جزوه، T و T^{-1} را بدست آورده و بوسیله آن متشابه قطری آن را بدست آورید.