



دانشکده‌ی علوم ریاضی

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

اساتید درس: آقای دکتر محسن جمالی و خانم دکتر سحر قاجار

تمرینهای سری ششم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

نشان دهید بردار x در معادله دیفرانسیل مربوطه صدق می‌کند.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x = \begin{pmatrix} 6e^{-t} \\ -8e^{-t} + 2e^{2t} \\ -4e^{-t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

۲ پرسش دوم

نشان دهید بردار Ψ در معادله دیفرانسیل مربوطه صدق می‌کند.

$$\Psi' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

۳ پرسش سوم

چند جمله ای ویژه، مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس زیر را بدست آورید. نشان دهید می‌توان کل فضای \mathbb{C}^3 را از این بردارهای ویژه ساخت.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرینهای سری ششم معادلات دیفرانسیل-۱

۴ پرسش چهارم

نشان دهید $\det A = 0$ اگر و تنها اگر $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه آن باشد.

۵ پرسش پنجم

نشان دهید برای ماتریس A که لزوماً حقیقی نمی باشد و هر دو بردار دلخواه x و y ، $(Ax, y) = (x, A^*y)$ و از آنجا نتیجه بگیرید برای یک ماتریس هرمیتی A و هر دو بردار دلخواه x و y ، $(Ax, y) = (x, Ay)$.

۶ پرسش ششم

فرض کنید A یک ماتریس هرمیتی، λ یک مقدار ویژه آن و x بردار ویژه متناظر با آن باشد.

(آ) نشان دهید $(Ax, x) = (x, Ax)$.

(ب) نشان دهید $\lambda(x, x) = \bar{\lambda}(x, x)$.

(پ) نشان دهید $\lambda = \bar{\lambda}$.

۷ پرسش هفتم

فرض کنید λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی A با مقادیر ویژه متناظر $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ باشند. اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ نشان دهید $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ متعامد هستند.