



دانشکده‌ی علوم ریاضی

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

اساتید درس: آقایان دکتر امیر جعفری و دکتر محمدجواد حبیبی

تمرین سری نهم ریاضی عمومی دو

تمرینها به ترتیب تمرینهای زیر از کتاب مرجع هستند:

۱۰۱۶: ۷، ۲۹، ۳۷، ۳۹

۲۰۱۶: ۵، ۱۳، ۱۷، ۲۳، ۴۵

۳۰۱۶: ۷، ۱۳، ۲۳، ۲۹، ۳۷، ۳۹، ۴۱

تمرین ۱ میدان برداری $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ را با رسم دیاگرامهایی مانند شکل‌های ۵ و ۶ کتاب، رسم کنید.

تمرین ۲ میدان برداری گرادیان ∇f را برای $f(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$ را یافته و رسم کنید.

تمرین ۳ یک ذره در میدان سرعت $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2 \rangle$ حرکت می کند. اگر در زمان $t = 3$ در مکان $(2, 1)$ باشد، مکان را در زمان $t = 3.01$ تخمین بزنید.

تمرین ۴ خطوط جریان یک میدان برداری مسیرهایی است که توسط یک ذره طی می شود که میدان سرعت آن میدان برداری داده شده باشد. پس بردارها در میدان برداری مماس بر خطوط جریان هستند.

(آ) یک میدان برداری $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ را برای رسم خطوط برداری استفاده کنید. آیا می توانید از روی ترسیمهای خود معادلات خطوط جریان را حدس بزنید؟

(ب) اگر معادلات پارامتری خطوط جریان بصورت $x = x(t)$ و $y = y(t)$ باشند، توضیح دهید چرا این توابع در معادلات دیفرانسیلی $dx/dt = x$ و $dy/dt = -y$ صدق می کنند. از حل معادلات دیفرانسیل برای یافتن معادله خط جریانی که از $(1, 1)$ می گذرد استفاده کنید.

تمرین ۵ انتگرال خطی $\int_C (x^2y + \sin x)dy$ را روی خم صفحه ای C که کمان سهمی $y = x^2$ از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه $(\pi, 2\pi)$ است محاسبه کنید.

تمرین ۶ انتگرال خطی مورد نظر را روی خم فضایی ذکر شده C بدست آورید.

$$\int_C xy e^{yz} dy, \quad C : x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1 \quad (۱)$$

تمرین سری نهم ریاضی عمومی دو-۱

۲) پاره خط از $(1, 0, 0)$ تا $(4, 1, 2)$: $\int_C z^2 dx + x^2 dy + x^2 dz$

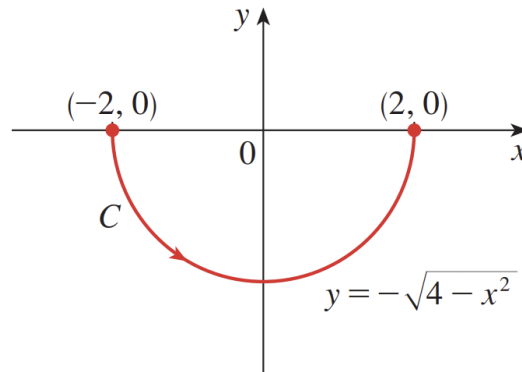
تمرین ۷ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را که $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin x \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$ و $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$ در طول C محاسبه کنید.

تمرین ۸ جایگاه یک شی با جرم m در زمان t ، با $\mathbf{r} = at^2 \mathbf{i} + bt^3 \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$ مشخص می شود. (آ) نیروی فشاری بر شیء در زمان t چقدر است.

(ب) کار انجام شده در اثر نیروی وارذ شده در بازه زمانی $0 \leq t \leq 1$ چقدر است؟

تمرین ۹ مشخص کنید $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \sin y) \mathbf{i} + (e^x + x \cos y) \mathbf{j}$ میدان برداری پایستار هست یا خیر. اگر هست f را که $\mathbf{F} = \nabla f$ بدست آورید.

تمرین ۱۰ فرض کنید $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + y^2) \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j}$ و C خمی باشد که در شکل زیر می بینید.



شکل ۱: تمرین ۱۰

(آ) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.

(ب) نشان دهید \mathbf{F} پایستار است و تابع f را که $\mathbf{F} = \nabla f$ بدست آورید.

(پ) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را با استفاده از قضیه ۲ محاسبه کنید.

(ت) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را با ابتدا جایگزینی C خم ساده تری که تنها ابتدا و انتهایش با خم فوق الذکر یکی باشد بدست آورید.

تمرین ۱۱ (آ) برای $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz} \mathbf{i} + e^{xz} \mathbf{j} + xye^{xz} \mathbf{k}$ تابع f که $\mathbf{F} = \nabla f$ بدست آورید.

(ب) با استفاده از قسمت قبل $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را در طول خم C با $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1) \mathbf{i} + (t^2 - 1) \mathbf{j} + (t^2 - 2t) \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$ بدست آورید.

تمرین ۱۲ کار انجام شده توسط میدان برداری $\mathbf{F}(x, y) = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j}$ در حرکت شیء از نقطه $P(1, 0)$ تا نقطه $Q(2, 2)$ چقدر است؟

تمرین ۱۳ مشخص کنید مجموعه های داده شده باز، همبند و یا همبند ساده هستند یا خیر.

$$\{(x, y) \mid 0 < y < 3\} \quad (۱)$$

$$\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\} \quad (۲)$$

تمرین ۱۴ فرض کنید $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
(آ) نشان دهید $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$.

(ب) نشان دهید $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ از مسیر میان دو مستقل نیست. [راهنمایی: $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ و $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ که C_1 و C_2 نیمه های بالا و پایین دایره $x^2 + y^2 = 1$ از نقطه $(-1, 0)$ تا $(1, 0)$ هستند را محاسبه کنید.] آیا تناقضی با قضیه ۲ دارد؟