



دانشکده‌ی علوم ریاضی

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

اساتید درس: آقایان دکتر امیر جعفری و دکتر محمدجواد حبیبی

تمرین سری دوم ریاضی عمومی دو

تمرینها به ترتیب تمرینهای زیر از کتاب مرجع هستند:

$$۱۰۱۳ : ۵، ۱۳، ۳۷، ۳۹، ۴۹$$

$$۲۰۱۳ : ۱۳، ۱۹، ۲۳، ۳۹، ۵۵$$

$$۳۰۱۳ : ۳، ۱۵، ۱۹، ۲۷، ۵۱، ۶۵$$

$$۴۰۱۳ : ۳، ۱۹، ۳۹، ۴۱$$

تمرین ۱ حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \tan^{-1} t, \frac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle$$

تمرین ۲ خم با معادله برداری داده شده را رسم کنید. جهتی که در آن t در حال رشد است مشخص کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3, t, 2 - t^2 \rangle$$

تمرین ۳ سه رویه مختلف که خم زیر را در بردارند، مشخص کنید.

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$$

تمرین ۴ در چه نقاطی خم $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ سهمیگون $z = x^2 + y^2$ را قطع می کند؟

تمرین ۵ نشان دهید خم با معادلات پارامتری $x = t^2$, $y = 1 - 3t$ و $z = 1 + t^3$ از نقاط $(1, 4, 0)$ و $(9, -8, 28)$ می گذرد ولی از $(4, 7, -6)$ عبور نمی کند.

تمرین ۶ مشتق تابع برداری زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{r}(t) = t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j} + \sin t \cos t \mathbf{k}$$

تمرین سری دوم ریاضی عمومی دو-۱

تمرین ۷ بردار مماس واحد $\mathbf{T}(t)$ در نقطه مربوطه خم زیر که با پارامتر t مشخص شده است، بدست آورید.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} + 2 \sin 2t \mathbf{k}, \quad t = 0$$

تمرین ۸ اگر $\mathbf{r}(t) = \langle t^4, t, t^2 \rangle$ باشد، $\mathbf{r}'(t)$ ، $\mathbf{T}(1)$ ، $\mathbf{r}''(t)$ و $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ را بدست آورید.

تمرین ۹ انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} \mathbf{i} + \frac{1}{t^2+1} \mathbf{j} + \frac{1}{t^2+1} \mathbf{k} \right) dt$$

تمرین ۱۰ نشان دهید اگر \mathbf{r} یک تابع برداری که \mathbf{r}'' موجود است باشد،

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

تمرین ۱۱ طول خم زیر را بدست آورید:

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3, 3 \cos t, 3 \sin t \rangle, \quad -5 \leq t \leq 5$$

تمرین ۱۲ تابع طول کمان را از نقطه P در جهت افزایش t محاسبه کنید و خم را برحسب طول کمان پارامتریزه کنید. سپس نقطه ای که 4 واحد با نقطه P فاصله دارد را پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = (5-t)\mathbf{i} + (4t-3)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad P(4, 1, 3)$$

تمرین ۱۳ بردارهای مماس واحد، $\mathbf{T}(s)$ ، و نرمال واحد، $\mathbf{N}(s)$ ، را بیابید و از فرمول ۹ کتاب برای بدست آوردن انحنا استفاده کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t \rangle, \quad t > 0$$

تمرین ۱۴ از قضیه ۱۰ برای بدست آوردن انحنا استفاده کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{6}t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 2t^3 \mathbf{k}$$

تمرین ۱۵ بردارهای \mathbf{T} ، \mathbf{N} و \mathbf{B} را در نقطه داده شده بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \right\rangle, \quad \left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$$

تمرین ۱۶ (آ) نشان دهید که $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ بر \mathbf{B} عمود است.

(ب) نشان دهید که $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ بر \mathbf{T} عمود است.

(پ) از قسمتهای (آ) و (ب) نتیجه بگیرید که $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ با \mathbf{N} موازی است.

تمرین ۱۷ سرعت برداری، شتاب و تندی ذره را با تابع مکان داده شده بدست آورید. مسیر حرکت ذره را رسم کنید و بردار سرعت برداری، شتاب و تندی را برای مقدار مشخص t بکشید.

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle -\frac{1}{2}t^2, t \right\rangle, \quad t = 2$$

تمرین ۱۸ تابع مکان ذره ای با $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$ داده شده است. چه زمانی به کمترین مقدار تندی می رسیم؟

تمرین ۱۹ مولفه های مماس و نرمال را برای بردار شتاب زیر پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

تمرین ۲۰ مولفه های مماس و نرمال را برای بردار شتاب زیر در نقطه داده شده پیدا کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \ln t \mathbf{i} + (t^2 + 3t) \mathbf{j} + 4\sqrt{t} \mathbf{k}, \quad (0, 4, 4)$$