



دانشکده‌ی علوم ریاضی

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

اساتید درس: آقایان دکتر امیر جعفری و دکتر محمدجواد حبیبی

تمرین سری اول ریاضی عمومی دو

تمرین ۱ ناحیه ای از صفحه را مشخص کنید که شامل نقاطی باشد که مختصات قطبی آنها در شرط زیر صدق کند.

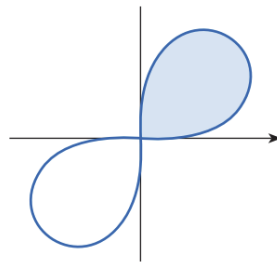
$$0 \leq r \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

تمرین ۲ بوسیله یافتن معادله دکارتی خم، آن را بدست آورید.

$$r = 5 \cos \theta$$

تمرین ۳ نشان دهید معادله قطبی $r = a \sin \theta + b \cos \theta$ ، که در آن $ab \neq 0$ ، نمایشگر یک دایره است. مرکز و شعاع آن را بیابید.

تمرین ۴ مساحت منطقه سایه دار را بیابید.



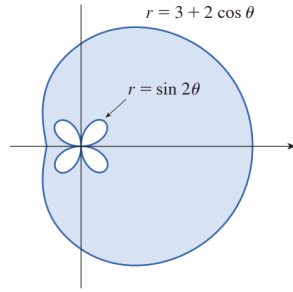
$$r^2 = \sin 2\theta$$

شکل ۱: تمرین ۴

تمرین ۵ مساحت منطقه قرارگرفته بین خهای زیر را بیابید.

$$r = \sin 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$$

تمرین سری اول ریاضی عمومی دو-۱



شکل ۲: تمرین ۶

تمرین ۶ مساحت منطقه سایه دار را در خم داده شده بیابید.

تمرین ۷ طول دقیق خم داده شده را بیابید.

$$r = 2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

تمرین ۸ شیب خط مماس بر خم قطبی داده شده را بر نقطه ای که با مقدار θ مشخص شده است، بیابید.

$$r = \frac{1}{\theta}, \quad \theta = \pi$$

تمرین ۹ روی خم قطبی داده شده نقاطی را بیابید که خط مماس در آن نقاط افقی یا عمودی باشد.

$$r = \sin \theta$$

تمرین ۱۰ کدامیک از نقاط $A(-4, 0, -1)$ ، $B(3, 1, -5)$ و $C(2, 4, 6)$ به صفحه yz نزدیکتر است؟ کدام نقطه در صفحه xz قرار دارد؟

تمرین ۱۱ رویه ای در \mathbb{R}^3 که با معادله $x + y = 2$ مشخص می شود، شرح داده و رسم کنید.

تمرین ۱۲ طول اضلاع مثلث PQR را بیابید. آیا مثلث واقعی هست؟ آیا مثلث متساوی الساقین است؟

$$P(3, -2, -3), \quad Q(7, 0, 1), \quad R(1, 2, 1)$$

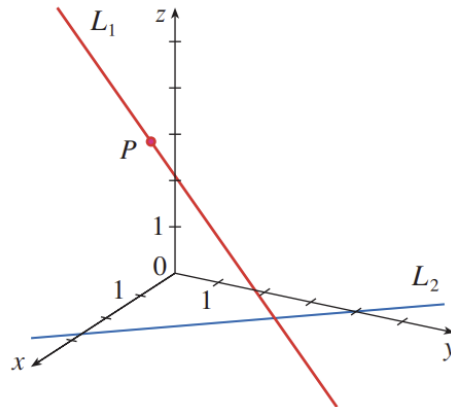
تمرین ۱۳ ناحیه ای در \mathbb{R}^3 که با نامعادله $y^2 + z^2 \leq 25$ مشخص می شود، شرح دهید.

تمرین ۱۴ در شکل خط L_1 و خط دومی L_2 را مشاهده می کنید که تصویر L_1 روی صفحه xy است. (به عبارت دیگر، نقاط روی L_2 دقیقاً پایین یا بالای نقاط روی L_1 است.)

تمرین سری اول ریاضی عمومی دو-۲

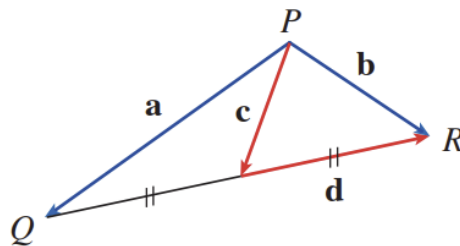
(آ) مختصات نقطه P روی خط L_1 را بیابید.

(ب) نقاط A, B, C در شکل را مشخص کنید که خط L_1 صفحات xy, yz, xz را در آنها قطع می کند.



شکل ۳: تمرین ۱۴

تمرین ۱۵ در شکل انتهای c و ابتدای d وسط پاره خط QR است. c و d را بر حسب a و b بنویسید.



شکل ۴: تمرین ۱۵

تمرین ۱۶ یک کوارتربک (نام یکی از پست های بازی فوتبال آمریکایی است) توپ فوتبال با زاویه با سطح افق 40° درجه و سرعت $20m/s$ پرتاب می کند. بردارهای افقی و عمودی سرعت را بیابید.

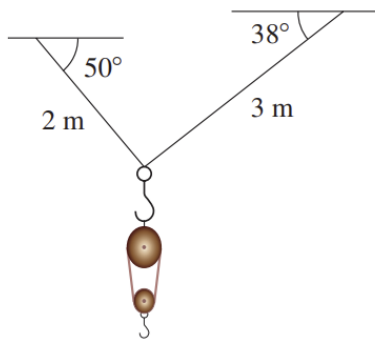
تمرین ۱۷ یک جعبه فرقه بالابر متحرک در یک انبار با دو طناب از طول $2m$ و $3m$ آویزان شده است. وزن بالابر $350N$ است. طنابها در ارتفاع متفاوتی بسته شده اند که یکی زاویه 50° و دیگری زاویه 38° با افق دارد. میزان کشش در هر طناب و بزرگی آن را بیابید.

تمرین ۱۸ (آ) بردارهای $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$ و $\mathbf{c} = \langle 7, 1 \rangle$ را رسم کنید.

(ب) بوسیله رسم نشان دهید که اسکالرهایی s و t وجود دارند که $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.

(پ) با رسم مقادیر s و t را تقریب بزنید.

(ت) مقادیر s و t را دقیق بدست آورید.



شکل ۵: تمرین ۱۷

تمرین ۱۹ با استفاده از بردارها ثابت کنید خط واصل وسط دو ضلع مثلث معادل ضلع سوم است و طولش هم نصف آن است.

تمرین ۲۰ با استفاده از بردارها مشخص کنید مثلثی با رئوس $P(1, -3, -2)$ ، $Q(2, 0, -4)$ و $R(6, -2, -5)$ قائم الزاویه هست یا خیر.

تمرین ۲۱ زاویه بین دو خط زیر را تا دو رقم اعشار بدست آورید.

$$y = 4 - 3x, \quad y = 3x + 2$$

تمرین ۲۲ نشان دهید بردار $\text{orth}_a \mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_a \mathbf{b}$ بر بردار \mathbf{a} عمود است. (به آن تصویر عمود \mathbf{b} می گویند.)

تمرین ۲۳ فاصله از یک نقطه تا یک خط: با استفاده از تصویر اسکالر نشان دهید که فاصله از نقطه $P_1(x_1, y_1)$ تا خط $ax + by + c = 0$ برابر با

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

است. با استفاده از این فرمول فاصله نقطه $(-2, 3)$ تا خط $3x - 4y + 5 = 0$ را بدست آورید.

تمرین ۲۴ تساوی متوازی الاضلاع: تساوی متوازی الاضلاع بیان می کند:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

(آ) یک بیان هندسی برای تساوی متوازی الاضلاع ارائه دهید.

(ب) تساوی متوازی الاضلاع را ثابت کنید.

تمرین ۲۵ ضرب خارجی $a \times b$ را پیدا کنید و نشان دهید بر هر دو a و b عمود است.

$$a = \frac{1}{2}i + \frac{1}{3}j + \frac{1}{4}k, \quad b = i + 2j - 3k$$

تمرین ۲۶ مشخص کنید که آیا عبارات زیر معنی دارن یا خیر، اگر ندارند چرا و اگر دارند مشخص کنید حاصل عبارت بردار است یا اسکالر.

$$(a \times b) \cdot (c \times d) \quad (ج) \quad (a \cdot b) \times (c \cdot d) \quad (ث) \quad a \cdot (b \cdot c) \quad (ت) \quad a \times (b \times c) \quad (پ) \quad a \times (b \cdot c) \quad (ب) \quad a \cdot (b \times c) \quad (آ)$$

تمرین ۲۷ حجم متوازی السطوح با یالهای متصل به هم PQ ، PR و PS را بیابید.

$$P(-2, 1, 0), \quad Q(2, 3, 2), \quad R(1, 4, -1), \quad S(3, 6, 1)$$

تمرین ۲۸ از اینکه

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

استفاده کرده و ثابت کنید:

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

تمرین ۲۹ فرض کنید $a \neq 0$

(آ) اگر $(a \cdot b) = (a \cdot c)$ ، آیا می توان نتیجه گرفت که $b = c$ ؟

(ب) اگر $(a \times b) = (a \times c)$ ، آیا می توان نتیجه گرفت که $b = c$ ؟

(پ) اگر $(a \cdot b) = (a \cdot c)$ و $(a \times b) = (a \times c)$ ، آیا می توان نتیجه گرفت که $b = c$ ؟