به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری دوازدهم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. هر یک از توابع f و g با ضابطه‌های زیر را به یک سری تیلور حول $a = ۰$ بسط دهید و در هر حالت شعاع همگرایی سری را محاسبه کنید. با استفاده از سری‌های به دست آمده مشتق دهم f و g را در صفر به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱۶} \qquad g(x) = \frac{x^۳}{(x-۲)^۲}.$$

۲. برای $n \geq ۱$، تعریف می‌کنیم $a_n = \int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x^n}\mathrm{d}x$.

الف) نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$.

ب) نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \frac{۱-a_n}{\frac{۱}{n}} = \ln ۲$.

ج) در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_n (۱ - a_n)$ بحث کنید.

۳. سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید برای $|x| < ۱$ سری فوق به $\frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x})$ همگراست.

ب) ثابت کنید برای $۰ < x < ۱$ داریم $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) > ۲x$.

ج) به کمک قسمت قبل نشان دهید $e < ۳$.

۴. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در هر نقطه از هر مرتبه مشتق داشته باشد و عدد طبیعی N و عدد مثبت K وجود داشته باشد که به ازای هر عدد حقیقی x و $n \geq N$ رابطه $|f^{(n)}(x)| \leq K|x|^n$ برقرار باشد. ثابت کنید سری تیلور f حول هر نقطه به تابع f همگراست.

۵. الف) نشان دهید انتگرال ناسره $\int_۱^{\infty}(\frac{۱}{x} - \ln(۱ + \frac{۱}{x}))\mathrm{d}x$ همگراست.

ب) نتیجه بگیرید که سری $\sum a_n$ که در آن $a_n = \frac{۱}{n} - \int_n^{n+۱}\frac{\mathrm{d}x}{x}$، همگراست. بعلاوه اگر مجموع این سری برابر s باشد، نشان دهید $s = \lim_{n\to\infty}(۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n} - \ln n)$.

۶. در هر قسمت بازه همگرایی و مجموع سری را محاسبه کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n$.

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$.

۷. با استفاده از سری توانی، مجموع سری عددی داده شده در هر قسمت را محاسبه کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}$.

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$.

ج) $1 + \frac{1}{2\times 2!} + \frac{1}{4\times 3!} + \frac{1}{8\times 4!}$.

۸. مجموع سری داده شده را محاسبه کنید.

$$x^3 - \frac{x^9}{3! \times 4} + \frac{x^{15}}{5! \times 16} - \frac{x^{21}}{7! \times 64}.$$