به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری یازدهم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. الف) نشان دهید:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{1}{n}}}{1+t} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}.$$

ب) فرض کنید $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \mathrm{d}x$. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} n a_n = \ln 2$.

ج) با ذکر دلیل همگرایی سری $\sum a_n$ را بررسی کنید.

۲. با استفاده از تابع $f(x) = \ln x$، نامساوی زیر را برای عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq (n+1)^{n+1} e^{-n}.$$

۳. دنباله $\{a_n\}$ را به‌صورت $a_n = \int_0^1 \sin^n(x) \mathrm{d}x$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ و سری $\sum_n (-1)^{n+1} a_n$ همگرا است.

۴. الف) نشان دهید اگر $a_n > 0$ و $\lim_{n\to\infty} n a_n \neq 0$، آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است.

ب) اگر $\sum a_n$ یک سری همگرا با جملات مثبت باشد، آیا $\sum \sin a_n$ نیز همگرا است؟

۵. الف) نشان دهید برای x های مثبت، رابطه $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ برقرار است و با کمک آن نتیجه بگیرید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 1.$$

ب) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$ به ازای چه مقادیری از α، همگرای مطلق و یا همگرای مشروط است؟

ج) به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، N را طوری بدست آورید که اگر به جای حد سری از مجموع جزئی آن S_n استفاده شود، برای $n \geq N$ خطا از 10^{-3} نابیشتر شود.

۶. همگرایی و واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید:

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^۲+۱}$.

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^{۲n}+۱}{۳^n+۱}$.

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \sin(\frac{۱}{n^۲})$.

د) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(\ln n)^p}$، که در آن $p > ۰$ است.

ه) $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^p}$، که در آن $p > ۰$ است.

۷. فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری همگرا با جمله‌های نامنفی باشند.

الف) ثابت کنید سری $\sum a_n b_n$ همگرا است.

ب) فرض کنید $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$. با یک مثال نقض نشان دهید که لازم نیست $\sum a_n b_n$ برابر AB باشد.

۸. در هر قسمت با استفاده از مفهموم انتگرال، nای را پیدا کنید که اختلاف مجموع جزئی s_n از s کمتر از $۱۰^{-۳}$ باشد.

الف) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^۳}$.

ب) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^۲+۴}$.