به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری دهم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. فرض کنید α عددی گنگ است. نشان دهید اگر دنباله اعداد حقیقی $x_1, x_2, x_3, \ldots$ به α همگرا باشد، عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه ۱۰۰۰ رقم اول در بسط اعشاری (بعد از ممیز) $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ با هم برابر هستند.

۲. فرض کنید $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $|f'(x)| < 1$. ثابت کنید دنباله $a_n := f(\frac{1}{n})$ همگرا است.

۳. تابع $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید دنباله $\{f^{2n}(1)\}$ صعودی، دنباله $\{f^{2n+1}(1)\}$ نزولی و $f^{2n}(1) \leq f^{2n+1}(1)$

ب) حد دنباله‌های $\{f^{2n}(1)\}$ و $\{f^{2n+1}(1)\}$ چیست؟

ج) N را طوری بگیرید که اگر به جای حد دنباله از $f^n(1)$ استفاده شود، برای $n \geq N$ خطا از 10^{-3} کمتر باشد.

توجه: منظور از $f^n(x)$ ترکیب n بار تابع f با خودش است.

۴. برای هر $a > 0$، مطلوبست محاسبه حد $\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$.

۵. در هر قسمت حد خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big((1 + \dfrac{1}{n})^5 + (1 + \dfrac{2}{n})^5 + \ldots + (1 + \dfrac{n}{n})^5\Big)$.

ب) $\lim_{n\to\infty} (\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \ldots + \dfrac{n}{2n^2})$.

ج) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + i^2}$.

د) $\lim_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{1}{(2n+3)^2 - 1^2} + \dfrac{1}{(2n+6)^2 - 2^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2n+3n)^2 - n^2}\Big)$.

۶. فرض کنید p عددی مثبت باشد. با استفاده از تکنیک‌های انتگرال ریمان نشان دهید

$$lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

۷. همگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرا بودن مقدار انتگرال را به دست آورید.

الف) $\int_{-۲}^{\infty} \frac{۱}{x+۴}\mathrm{d}x$.

ب) $\int_{e}^{\infty} \frac{۱}{x(\ln x)^{۲}}\mathrm{d}x$.

ج) $\int_{۰}^{۹} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۱}}\mathrm{d}x$.

د) $\int_{۰}^{۱} x\ln x\mathrm{d}x$.

۸. همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{x-\ln x}\mathrm{d}x$.

ب) $\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۴}+x^{۲}+۱}}\mathrm{d}x$.

ج) $\int_{۰}^{\infty} \frac{\arctan x}{۲+e^{x}}\mathrm{d}x$.

د) $\int_{۰}^{\pi} \frac{\sin^{۲} x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.