به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۲-۰۳
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری نهم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

- $\int x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{\tan x\sec^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{1}{e^{2x}-4e^x+4}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-3\cos x}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{1}{x^2+x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
- $\int \ln(x^2-x+2)\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\mathrm{d}x$.
- $\int (\sin^{-1}(x))^2\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.
- $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\mathrm{d}x$.

۲. فرض کنید f و g از مرتبه دوم روی بازه $[a,b]$ مشتق پیوسته داشته باشند. اگر داشته باشیم $f(a)=g(a)=f(b)=g(b)=0$، آنگاه نشان دهید:

$$\int_a^b f(x)g''(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f''(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

- چه فرض‌های دیگری در مورد توابع f و g در نقطه a و b همین نتیجه را می‌دهد؟

۳. با استفاده از تغییر متغیر $t=\tan(\frac{x}{2})$ می‌توان هر عبارت مثلثاتی را به توابع گویا تبدیل کرد. با استفاده از این شیوه انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x-4\cos x}$.

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$.

۴. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ تعریف می‌کنیم.

الف) ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0$، اما $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ همگرا نیست.

ب) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مانند r، عدد مثبت s وجود دارد که $\lim_{x\to+\infty}\int_{-sx}^{x} f(t)\mathrm{d}t=r$.

۵. فرض کنید $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ توابعی پیوسته هستند همچنین رابطه $g(x)>0$ برقرار است. ثابت کنید مقدار $c\in(a,b)$ وجود دارد بطوریکه:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

۶. فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x\in[0,1]$ تعریف کنید $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. ثابت کنید نقطه c، $0\le c\le 1$، موجود است که

$$F(1)-F(c)=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

۷. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر است. اگر تقعر f رو به بالا باشد و $f(0)=0$، ثابت کنید برای هر $x>0$ داریم $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\le\frac{1}{2}f(x)$.