به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری هشتم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر x، $f''(x) > 0$.

الف) فرض کنید نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $f'(x_0) > 0$. ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

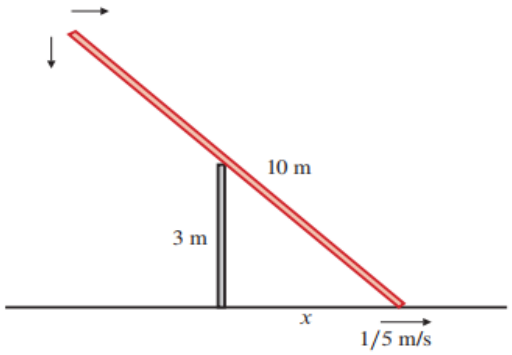
ب) فرض کنید نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $f'(x_0) < 0$. ثابت کنید $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

۲. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر است که $f''(x) > 0$. تابع $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید اگر مشتق g در نقطه a صفر شود، a یک نقطه مینیمم موضعی برای g است. نتیجه بگیرید مشتق g حداکثر در یک نقطه صفر می‌شود.

۳. دو دالان عمود بر هم با عرض‌های a و b که $0 \le a \le b$ در نظر بگیرید. میخواهیم میله‌ای به طول l را در حالت افقی از دالان به عرض b به دالان به عرض a ببریم. بزرگ‌ترین مقدار l_0 را پیدا کنید که اگر $l \le l_0$ این کار امکان‌پذیر باشد.

۴. کپسول گازی به شکل استوانه با سقف نیمکره است. نسبت ارتفاع به شعاع نیمکره چقدر باشد که با حجم داده شده حداقل مصالح در ساخت کپسول به کار گرفته شود.

۵. یک طرف نردبانی به طول ۱۰ متر بر روی زمین قرار دارد. نردبان بر روی فنسی به طول ۳ متر همانند شکل قرار داده شده است. همچنین فاصله انتهای نردبان که بر روی زمین است از فنس برابر ۴ متر است. اگر انتهای نردبان را با نرخ ۱/۵ متر بر ثانیه بکشیم. تعیین کنید سر دیگر نردبان با چه نرخی در جهت‌های افقی و عمودی حرکت می‌کند.



۶. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ چهار بار مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f''(a) = ۰$. همچنین عدد M وجود دارد بطوریکه $f^{(۴)}(x) \leq M$. ثابت کنید رابطه زیر برای هر $h \in \mathbb{R}$ برقرار است.

$$|f(a+h) - ۲f(a) + f(a-h)| \leq \frac{mh^۴}{۱۲}$$

۷. مقدار $\ln(\frac{۹}{۱۰})$ را با خطای کمتر از ۵×۱۰^{-۴} محاسبه کنید.

۸. اگر $f(x) : (۰, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و

$$\lim_{x \to +\infty} (af(x) + f'(x)) = L$$

در این صورت ثابت کنید که $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{L}{a}$. (در اینجا $a > ۰$ فرض شده است.)