



درس ریاضی عمومی ۱  
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲  
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری هفتم

دانشکده علوم ریاضی

۱. فرض کنید تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد. مقدار  $k$  را چنان پیدا کنید که انتگرال  $\int_a^b (f(x) - k)^2 dx$  مینیمم شود.

۲. نقاط بحرانی تابع زیر را روی اعداد حقیقی به دست آورید و نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی آن را مشخص کنید.

$$F(x) = \int_{-2}^{x^2-1} \sqrt{t^3 - 3t^2} dt.$$

۳. فرض کنید  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  تابعی پیوسته باشد. اگر برای هر  $x$  در دامنه داشته باشیم  $(f(x))^2 = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$ ، ضابطه تابع  $f$  را به دست آورید.

۴. الف) فرض کنید  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد و برای هر  $x$ ،  $f(x) \geq 0$ . اگر  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ، ثابت کنید برای هر  $x$ ،  $f(x) = 0$ .

ب) فرض کنید  $k$  عددی ثابت باشد. نشان دهید تابع پیوسته  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  با ویژگی‌های زیر وجود ندارد:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] : f(x) \geq 0, & \quad \int_0^1 f(x) dx = 1, \\ \int_0^1 x f(x) dx = k, & \quad \int_0^1 x^2 f(x) dx = k^2. \end{aligned}$$

۵. مساحت ناحیه محصور بین محور  $x$  ها، خط واصل بین مبدأ، نقطه  $(\sqrt{1+b^2}, b)$  و شاخه سمت راست هذلولوی  $x^2 - y^2 = 1$  را محاسبه نمایید. در این سوال  $b > 0$  فرض شده است.

۶. در هر قسمت انتگرال خواسته شده را محاسبه کنید.

(الف)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$$

(ب)

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx.$$

(ج)

$$\int \sin^4 t \cos^6 t dt.$$

(د)

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

(ه)

$$\int \sec^3(\theta) \tan^3(\theta) d\theta.$$

(و)

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx.$$