به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری ششم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. به فرض f و g توابعی مشتق‌پذیر بر بازه I باشند و برای هر $x \in I$ نامساوی $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ برقرار باشد. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی f دقیقا یک ریشه تابع g وجود دارد.

۲. نامساوی زیر را برای $x > 0$ نشان دهید.
$$\frac{x-1}{x} < \ln(x).$$
در چه صورتی تساوی برقرار است؟

۳. نشان دهید تابع $f(x) = \sin x - x$ روی اعداد حقیقی وارون‌پذیر است و این تابع وارون در سراسر اعداد حقیقی پیوسته است، ولی تابع وارون در مبدا مشتق‌پذیر نیست.

۴. اگر داشته باشیم $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ مطلوبست مقدار $(f^{-1})'(2)$ را محاسبه کنید.

۵. برای هر خط $y = mx + 1$، بازه‌ای حول مبدا پیدا کنید که روی آن بازه داشته باشیم:
$$|e^x - (1+x)| \leq |e^x - (1+mx)|.$$

۶. ثابت کنید تابع زیر بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و مشتق‌های آن را در صفر محاسبه کنید.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۷. مشتق تابع $f(x) = x - \sin^{-1}(\sin x)$ را در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ محاسبه کنید، سپس نمودار تابع را در بازه مذکور رسم کنید.

۸. فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت باشد. معادله $a^x = 1 + x$ دارای جواب $x = 0$ برای تمام مقادیر a است. آیا جواب مثبت دیگری وجود دارد؟ این مطلب را برای مقادیر مختلف a مورد بررسی قرار دهید.

۹. الف) نشان دهید تابع $f(x) = x^x$ بر بازه $[e^{-1}, \infty)$ اکیدا صعودی است.

ب) اگر g وارون تابع f در قسمت قبل باشد، نشان دهید:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{g(y)\ln(\ln y)}{\ln y} = 1$$

۱۰. نمودار تابع $f(x) = e^x - \ln x$ را رسم کنید و خصوصا نشان دهید مینیمم مطلق تابع f در بازه $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ رخ می‌دهد.