به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری چهارم و پنجم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. نشان دهید اگر $b < a^2$، آنگاه دو خط مماس متمایز به منحنی $y = x^2$ که از نقطه (a, b) می‌گذرد وجود دارد. اگر $b = a^2$ یا $b > a^2$ باشد، چند خط مماس بر منحنی نمودار $y = x^2$ و گذرنده از (a, b) وجود دارد؟

۲. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ را محاسبه کنید.

۳. اگر تابع f سه بار مشتق پذیر و مشتق سوم آن پیوسته باشد، نشان دهید:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} = f'''(x).$$

۴. نشان دهید نمودار تابع $y = x^2$ نمودار $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ را در زوایای قائمه قطع می‌کند.

۵. فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند که $f(0) = g(0)$. اگر برای هر $x \in [-1, 1]$ داشته باشیم: $f(x) \geq g(x)$، نشان دهید $f'(0) = g'(0)$.

۶. با استفاده از قضیه مقدار میانگین مشتق نشان دهید که به ازای $x > 0$ در بازه $[0, x]$ رابطه زیر برقرار است:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

آیا این نامساوی به ازای $x < 0$ نیز برقرار است؟

۷. الف) میزان تغییر مساحت یک مربع نسبت به طول ضلعش را وقتی طول ضلع برابر ۴ سانتی‌متر است، بیابید.
ب) میزان تغییر قطر یک دایره نسبت به مساحتش را بیابید.

۸. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و کراندار باشد. نشان دهید اگر $f'(x)$ تنها در تعدادی متناهی نقطه صفر شود، آنگاه f در بی‌نهایت حد دارد.

۹. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید مشتق n -ام تابع $y = \tan x$ به شکل $P_{n+1}(\tan x)$ است که P_{n+1} یک چند جمله‌ای از درجه $n+1$ است.

۱۰. فرض کنید f بر بازه I دوبار مشتق پذیر باشد. همچنین $f(0) = f(1) = 0$ و $f(2) = 1$. ثابت کنید

الف) به ازای نقطه‌ای مانند $a \in I$، داریم $f'(a) = \frac{1}{2}$.

ب) به ازای نقطه‌ای مانند $b \in I$، داریم $f''(b) > \frac{1}{2}$.

ج) به ازای نقطه‌ای مانند $c \in I$، داریم $f'(c) = \frac{1}{7}$.

۱۱. فرض کنید برای تابع دوبار مشتق‌پذیر $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ به ازای هر $x \in [0,1]$ داریم $|f''(x)| < 1$. نشان دهید اگر $f(0) = f(1)$، آنگاه $|f'(x)| < 1$ برای هر $x \in [0,1]$.

۱۲. فرض کنید $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0) = 0$. فرض کنید برای هر $x \in (0,\infty)$، $f'(x)$ وجود داشته باشد و $f'(x)$ روی $(0,\infty)$ تابعی صعودی باشد. ثابت کنید تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ نیز روی $(0,\infty)$ صعودی است.

۱۳. الف) معادله مماس بر منحنی $\cos(\frac{\pi y}{x}) = \frac{x^2}{y} - \frac{17}{2}$ را در نقطه $(3,1)$ بیابید.

ب) مقدار y'' را برحسب x و y در معادله $x^3 - y^2 + y^3 = x$ بیابید.

۱۴. به فرض آنکه $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(2) = 9$، حدود زیر را پیدا کنید:

الف) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}$

ب) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}$

۱۵. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x, & x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \text{اگر} \\ x^2, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) همه نقاطی را بیابید که f در آنها پیوسته است. به خصوص، آیا در $x = 0$ پیوسته است؟

ب) آیا حکم زیر درست است که به ازای هر دو عدد حقیقی a و b، x ای مابین آن‌ها وجود دارد که

$$f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

ج) همه نقاطی را بیابید که در آن‌ها f مشتق پذیر است. به خصوص، آیا در $x = 0$ مشتق پذیر است؟

۱۶. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$. در این صورت، درستی هریک از احکام زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $c\in(a,b)$ موجود باشد به طوری که $f(c)>0$، آنگاه $d\in(a,b)$ وجود دارد با این ویژگی که برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\leq f(d)$ و $f'(d)=0$.

ب) اگر f دوبار مشتق‌پذیر فرض شود و برای هر $x\in[a,b]$ تساوی $f(x)=f'(x)+f''(x)$ صدق کند، آنگاه f تابع ثابت صفر است.