به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری سوم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. نشان دهید معادله $x^{۳} - ۱۵x + ۱ = ۰$، دارای سه ریشه در بازه $[-۴, ۴]$ است.

۲. فرض کنید تابع $f : [۰, n] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(۰) = f(n)$. نشان دهید اعداد حقیقی $x_۱, x_۲ \in [۰, n]$ وجود دارند، بطوریکه $f(x_۱) = f(x_۲)$ و $x_۲ - x_۱ = ۱$.

۳. اگر تابع f بر روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $a < c < b$ چنان موجود باشد بطوریکه $f(a) < f(b) < f(c)$. آنگاه ثابت کنید که بی‌نهایت زوج مانند $(x_۱, x_۲)$ موجود هستند که برای آن‌ها رابطه $f(x_۱) = f(x_۲)$ برقرار است.

۴. ثابت کنید هر چندجمله‌ای از درجه زوج روی $\mathbb{R}$ دارای ماکزیمم یا مینیمم است.

۵. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که

الف) $\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^{۲}+۱} = ۰$

ب) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۱-۴x^{۲}}{۱-۲x} = ۲$

ج) $\lim_{x\to ۲} x^{۳} = ۸$

د) $\lim_{x\to ۱^{+}} \frac{۱}{x-۱} = \infty$

ه) $\lim_{x\to \infty} \frac{۱}{x^{۲}+۱} = ۰$

۶. الف) اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $M \neq ۰$، آنگاه ثابت کنید $\delta > ۰$ وجود دارد بطوریکه:

$$۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |g(x)| > \frac{M}{۲}.$$

ب) همچنین با فرضیات قسمت قبل ثابت کنید که

$$\lim_{x\to a} \frac{۱}{g(x)} = \frac{۱}{M}.$$

۷. اگر f تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a,b]$ باشد، آنگاه $R(f)$ نیز برابر یک بازه بسته در اعداد حقیقی است.

۸. کوهنوردی روز پنجشنبه ساعت هشت صبح از نقطه A به سمت قله کوه حرکت می‌کند و بامداد روز جمعه به قله می‌رسد. کوهنورد پس از استراحت ساعت هشت صبح روز جمعه از قله به سمت نقطه A حرکت می‌کند و پس از طی کردن همان مسیر صعود به قله، بامداد شنبه به نقطه A می‌رسد. ثابت کنید زمانی از روز وجود دارد که کوهنورد در آن لحظه هر دو روز پنجشنبه و جمعه در یک نقطه از مسیر بوده است.

۹. فرض کنید $f,g : [0,1] \to [0,1]$ دو تابع پیوسته با ماکزیمم برابر باشند. ثابت کنید $c \in [0,1]$ وجود دارد که $f(c) = g(c)$.

۱۰. ثابت کنید اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نزولی باشد، نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $f(x_0) = x_0$.

۱۱. ثابت کنید اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، $f \circ f$ نزولی اکید نیست.