به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر پورنکی، دکتر مقدسی

تمرین سری دوم و سوم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. با قبول اینکه $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$، با استفاده از قواعد حد، حد خواسته شده در هر قسمت را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos x}{x}$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos x}{x^۲}$

۲. در هر قسمت حد خواسته شده را محاسبه کنید یا توضیح دهید چرا حد وجود ندارد.

الف) $\lim_{x\to \infty} \frac{\cos x}{x}$

ب) $\lim_{x\to ۰} x \sin(\frac{۱}{x})$

ج) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^۲ + ۲x} - \sqrt{x^۲ - ۲x})$

۳. اگر داشته باشیم $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = L$، آنگاه $\lim_{x\to ۰^-} f(x)$ را محاسبه کنید در صورتی که f تابعی زوج باشد. همین کار را برای زمانی که f تابعی فرد است انجام دهید.

۴. درست یا غلط بودن هر قسمت را مشخص کنید. در صورت درست بودن دلیل بیاورید و اگر گزاره گفته شده غلط است با یک مثال نقض آن را رد کنید.

الف) اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد، اما $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود نباشد. آنگاه $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ موجود نیست.

ب) اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود نباشند، آنگاه $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ موجود نیست.

ج) اگر $|f|$ در نقطه $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه خود f نیز در این نقطه پیوسته است.

۵. اگر $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = A$ و $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = B$، آنگاه مقدار حد در هر قسمت را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰^+} f(x^۳ - x)$

ب) $\lim_{x\to ۰^-} f(x^۲ - x^۴)$

۶. الف) تابعی پیوسته بر روی بازه (a, b) تعریف کنید که دارای مقدار مینیمم نباشد.

ب) تابعی پیوسته بر بازه $[a,\infty)$ تعریف کنید که دارای مقدار ماکسیمم نباشد.

ج) توضیح دهید که چرا مثال دو قسمت پیشین با قضیه مقدار اکسترمم توابع پیوسته تناقض ندارد.

۷. بدون استفاده از مشتق خواسته سوال در هر قسمت را به دست آورید.

الف) اگر مجموع دوعدد صحیح نامنفی برابر ۸ باشد، ماکسیمم حاصلضرب آن‌ها را به دست آورید.

ب) اگر مجموع دوعدد صحیح نامنفی برابر ۹ باشد، ماکسیمم و مینیمم مجموع مربعات دو عدد را محاسبه کنید.

۸. نشان دهید معادله $x^۳ - ۱۵x + ۱ = ۰$، دارای سه ریشه در بازه $[-۴, ۴]$ است.

۹. اگر تابع $f : [۰, ۱] \longrightarrow [۰, ۱]$ تابعی پیوسته باشد، ثابت کنید $c \in [۰, ۱]$ چنان موجود است بطوریکه $f(c) = c$.

۱۰. فرض کنید تابع f بر روی بازه $[۰, ۲]$ پیوسته باشد و $f(۰) = f(۲)$. نشان دهید عدد حقیقی $\xi \in [۱, ۲]$ وجود دارد بطوریکه $f(\xi) = f(\xi - ۱)$.

۱۱. اگر تابع f بر روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $a < c < b$ چنان موجود باشد بطوریکه $f(a) < f(b) < f(c)$. آنگاه ثابت کنید که بی‌نهایت زوج مانند $(x_۱, x_۲)$ موجود هستند که برای آن‌ها رابطه $f(x_۱) = f(x_۲)$ برقرار است.

۱۲. مقدار x در چه بازه‌ای حول نقطه ۱ باشد تا فاصله تابع $f(x) = \sqrt{x}$ از مقدار حدی آن در نقطه مذکور کمتر از $\epsilon = ۰/۱$ باشد.

۱۳. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که:

الف) $\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۲+۱} = ۰$

ب) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۱-۴x^۲}{۱-۲x} = ۲$

ج) $\lim_{x\to ۲} x^۳ = ۸$

د) $\lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x-۱} = \infty$

ه) $\lim_{x\to \infty} \frac{۱}{x^۲+۱} = ۰$

۱۴. الف) اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $M \neq ۰$، آنگاه ثابت کنید $\delta > ۰$ وجود دارد بطوریکه:

$$۰ < |x - a| < \delta \Longrightarrow |g(x)| > \frac{M}{۲}.$$

ب) همچنین با فرضیات قسمت قبل ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to a} \frac{۱}{g(x)} = \frac{۱}{M}.$$

۱۵. اگر f تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a,b]$ باشد، آنگاه $R(f)$ نیز برابر یک بازه بسته در اعداد حقیقی است.

۱۶. مینیمم تابع $f(x) = \frac{۱}{x-x^۲}$ را بر بازه $(۰,۱)$ به دست آورید. توضیح دهید چرا این مقدار مینیمم باید وجود داشته باشد؟