



دانشکده‌ی علوم ریاضی



نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

زمان: ۳ ساعت

میانترم اول ریاضی عمومی دو

۱ پرسش نخست

خم پارامتری $x = \cos \theta$, $y = \sec^2 \theta$ را که $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ، در نظر بگیرید.
الف) (۱۰ نمره) خم را در دستگاه مختصات دکارتی رسم کنید و با یک فلش جهت حرکت را مشخص کنید.
ب) (۱۰ نمره) انحنای این خم در نقطه متناظر $\theta = \frac{\pi}{3}$ را محاسبه کنید.

۲ پرسش دوم

فرض کنید الف) (۱۰ نمره) نشان دهید حد زیر موجود نیست.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4 + y^4}$$

ب) (۲۰ نمره) تابع دو متغیره f را همگن از درجه n می‌گوییم اگر برای هر x, y و t داشته باشیم:
 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. نشان دهید اگر f یک تابع دوبار مشتق پذیر و همگن از درجه n باشد، داریم:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f$$

۳ پرسش سوم

پتانسیل الکتریکی $V(x, y, z) = 5x^2 - 5xy + xyz$ در فضا داده شده است.

الف) (۵ نمره) نرخ تغییرات پتانسیل الکتریکی در نقطه $P = (3, 4, 5)$ و در راستای بردار $i + j - k$ پیدا کنید.

ب) (۱۰ نمره) در چه راستایی در نقطه P نرخ تغییرات V ماکسیمم است؟ و این مقدار ماکسیمم چقدر است؟

ج) (۱۰ نمره) رویه تراز $V = 1$ شامل نقطه $(1, 2, 3)$ است. معادله صفحه مماس بر این رویه در این نقطه چیست؟

۴ پرسش چهارم

(۲۵ نمره) تابع z بطور ضمنی توسط معادله $e^z = xyz$ داده شده است. مشتقات پاره ای $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را پیدا کنید و مقدار آنها را در نقطه متناظر با $(e, 1, 1)$ محاسبه کنید.

موفق باشید