



دانشکده‌ی علوم ریاضی



نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

زمان: ۳ ساعت

## میانترم معادلات دیفرانسیل

\* ارزش تمامی سوالات با هم برابر است.

\*\* تنها به پاسخهایی نمره داده خواهد شد که از روش یاد شده آن را حل کنند.

### ۱ پرسش نخست

ابتدا عامل انتگرال سازی به فرم  $\mu(xy^3)$  برای معادله زیر بیابید و سپس آن را حل کنید.

$$x^2y^3dx + x(1 + y^2)dy = 0$$

### ۲ پرسش دوم

جواب خصوصی تک جمله ای برای معادله دیفرانسیل زیر بیابید.

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 \ln x$$

### ۳ پرسش سوم

در مسئله مقدار اولیه زیر به جای  $y$  قرار دهید  $e^{-t}u$  و مسئله مقدار اولیه جدید را برای  $u$  با روش ضرایب نامعین (جدول ضمیمه) حل کنید و نشان دهید برای  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$   $|y(t)| < \frac{1}{2}te^{-t}$ .

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t}(\sin t + \cos t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}.$$

### ۴ پرسش چهارم

نشان دهید  $\{y_1 = x^2, y_2 = \sinh x, y_3 = \cosh x\}$  یک مجموعه اساسی جواب برای معادله زیر است.

$$(x^2 - 2)y''' - 2xy'' + (2 - x^2)y' + 2xy = F(x), \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

سپس با استفاده از قضیه آبل  $W[y_1, y_2, y_3](x)$  را بدست آورید.

### ۵ پرسش پنجم

جامعه شناسان نحوه پراکنده شدن شایعه در جامعه را مورد بررسی قرار داده اند و متوجه شدند که نرخ پخش شایعه نسبت مستقیم با تعداد افرادی دارد که آن را شنیده اند، یعنی  $x(t)$ ، و افرادی که آن را نشنیده اند، یعنی  $P - x(t)$ ، دارد. (تعداد کل افراد جامعه  $P$  است). فرض کنید از ۴۰۰ نفر ساکن در یک خوابگاه دانشجویی ز یک نفر از دکتر خوابگاه می شنود که آنفولانزای خطرناکی شیوع پیدا کرده است. اگر معادله زیر برای آن برقرار باشد،  $x(t)$  را بدست آورید. (راه حل کامل و دقیق باشد و عددگذاری صرف در فرمولهای کتاب و جزوه درسی نباشد). همچنین  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  را بدست آورید و نمودار  $x(t)$  را در بازه  $0 \leq t \leq 30$  رسم نمایید. برای مشخص کردن نقاط مهم نمودار لازم نیست محاسبه دقیق اعشاری داشته باشید. یک حدود تقریبی کافی است. ( $t$  بر حسب دقیقه است).

$$\frac{dx}{dt} = 0.001x(400 - x)$$

میانترم معادلات دیفرانسیل-۲

**TABLE 3.5.1** The Particular Solution of  $ay'' + by' + cy = g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t} \begin{cases} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{cases}$	$t^s \left( (A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha t} \cos(\beta t) \right. \\ \left. + (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \dots + B_n)e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right)$

موفق باشید