



تاریخ: ۰۲/۹/۲۳
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۴)

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۰۳-۰۲

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید. استفاده از ماشین حساب و نیز هرگونه پرسش و پاسخ در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.

سؤال ۱. تابع f را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & : x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \\ x^2 & : \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

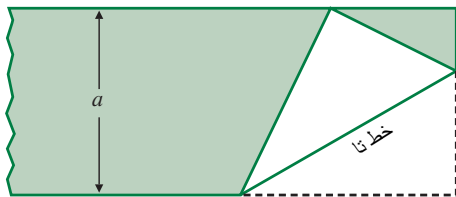
نشان دهید تابع f در نقطه صفر پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

سؤال ۲. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که بر (a, b) مشتق پذیر است و $f(a) = f(b) = 0$. نشان دهید $a < c < b$ وجود دارد به طوری که $f'(c) = f(c)$. (راهنمایی: تابع g با ضابطه $g(x) = e^{-x}f(x)$ را در نظر بگیرید.)

سؤال ۳. مجموعه تمام نقاطی از صفحه که در رابطه

$$3x^y - y^x = e^x + e^y$$

صدق می‌کنند یک منحنی در صفحه تشکیل می‌دهند که از نقطه (e, e) می‌گذرد. نشان دهید در یک همسایگی از e می‌توان از رابطه بالا y را بر حسب تابعی مشتق پذیر از x نوشت و سپس معادله خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطه (e, e) به دست آورید.



سؤال ۴. گوشه سمت راست پایینی در یک نوار کاغذی به عرض a سانتی‌متر را مانند شکل طوری برمی‌گردانیم که روی ضلع بالایی نوار قرار بگیرد و نیز خط تابی که به دست می‌آید دو ضلع مجاور نوار را قطع کند. کمترین طول ممکن برای این خط تا چقدر است؟

سؤال ۵. تابع f را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(الف) جدولی را به دست آورید که تغییرات تابع f را از نظر صعودی و نزولی بودن و نیز از نظر محدب و مقعر بودن روی کل دامنه تعریف آن مشخص می کند. سپس نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی f را بیابید و نمودار تابع f را رسم کنید.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، به ازای هر عدد مثبت a ، اعداد a^e و e^a را از نظر بزرگی و کوچکی با هم مقایسه کنید.

سؤال ۶. توابع f و g را با ضابطه های زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos x.$$

(الف) چند جمله ای های تیلور مرتبه دوم f و g را حول نقطه $\frac{\pi}{4}$ به همراه جمله های خطا به دست آورید.

(ب) مقدار حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos x} - \frac{1}{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right).$$

سؤال ۲: ۱۵ نمره،

سؤال ۴: ۲۰ نمره،

سؤال ۶: ۱۰+۱۰ نمره.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۵+۵ نمره،

سؤال ۳: ۱۵ نمره،

سؤال ۵: ۸+۱۲ نمره،

مجموع: ۱۰۰ نمره