دانشکده‌ی علوم ریاضی

زمان: ۳ ساعت نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

پایانترم معادلات دیفرانسیل

*ارزش تمامی سوالات با هم برابر است.

**تنها به پاسخهایی نمره داده خواهد شد که از روش یاد شده آن را حل کنند.

***هر جا از جدول لاپلاس استفاده می کنید، حتما شماره ردیف مورد استفاده را ذکر کنید.

۱ پرسش نخست

نشان دهید اگر λ عددی صحیح و مثبت باشد، در حل سری معادله لژاندر حول نقطه $x_0 = 0$، شعاع همگرایی یکی از دو جواب بی نهایت است.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

۲ پرسش دوم

جواب عمومی قسمت همگن معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر داده شده است. آن را به روش تغییر پارامتر حل کنید.

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$$

۳ پرسش سوم

معادله انتگرو دیفرانسیلی زیر را حل کنید (راهنمایی: پاسخ به صورت انتگرالی هست):

$$\int_0^t e^x x y'(x)dx + 2\sin t + \delta(t-\pi)y(t)\tan^{-1}(t-\pi) = 0, \quad y(0) = 1$$

۴ پرسش چهارم

انتگرال زیر را با تغییر متغیر مناسب بدست آورید.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{\ln x}}$$

۵ پرسش پنجم

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

یک بردار را استاندارد می نامیم اگر در آیه وسط آن برابر با ۱ باشد. مثلا u استاندارد است اما v استاندارد نیست. دستگاه زیر را به فرض اینکه بدانید یکی از مقادیر ویژه آن برابر ۳ است و فرم ژردان آن بصورت J است، (توجه کنید فرض مربوطه جهت تسهیل در کار است و بدون آن هم قابل حل هست) حل کنید و هر جا نیاز به برداری بود، آن را حتما استاندارد فرض کنید. (در صورت استفاده نکردن از بردار استاندارد نمره مربوطه داده نمی شود.)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -6 & -4 & -7 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

موفق باشید

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(s))$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n(n یک عدد صحیح است)	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
8. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
9. $e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$(n یک عدد صحیح است)	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F(\frac{s}{c}), \quad c > 0$
16. $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

پایانترم معادلات دیفرانسیل-۳