

به نام خدا



آزمون پایان ترم درس ریاضی مهندسی
نیم سال اول ۰۳-۰۲
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

دانشکده علوم ریاضی

ارزش همه سوالات با هم برابر است.

۱. مسئله گورسا زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = xy, \\ u(x, y) = -y^2, & \text{روی } y + x = 0 \\ u(x, y) = x^2. & \text{روی } y = 2x \end{cases}$$

۲. الف) مزدوج همساز تابع همساز $u(r, \theta) = 3r \cos \theta + 4r^2 \sin 2\theta$ را به دست آورید.

ب) یک تابع پیوسته $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ معرفی کنید که روی هذلولی $xy = 1$ مشتق پذیر و در سایر نقاط مشتق پذیر نباشد. مشتق $f(z)$ را نیز به دست آورید.

۳. الف) همه مقادیر و مقدار اصلی $(1 - \sqrt{3}i)^{1+i}$ را بیابید.

ب) بزرگترین میدانی را که تابع f با ضابطه $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$ در آن تحلیلی است، تعیین کنید.

۴. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos \theta} d\theta \quad \text{ب)} \quad \oint_{|z|=2} z^5 \sin \frac{1}{z} d\bar{z} \quad \text{الف)}$$

۵. انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \cos \theta} d\theta \quad \text{ب)} \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{(9+x^2)^2} dx \quad \text{الف)}$$

۶. الف) تصویر میدان $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ را تحت نگاشت $\omega = \frac{1}{z}$ به دست آورید.

ب) نگاشتی را بیابید که میدان بین دو خط متقاطع $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1$ و $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$ را به صورت همدیس، یک‌به‌یک و پوشا بر نیم‌صفحه بالایی بنگارد.