

به نام خدا

مخصوص کلاس حل تمرین

تمارین سری هفتم درس معادلات

(1) در هر یک از موارد زیر، بازه ای را تعیین کنید که وجود جواب در آن قطعی باشد.

الف) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t$

ب) $t(t-1)y^{(4)} + e^t y'' + 4t^2 y = 0$

ج) $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0$

(2) برای هر یک از معادلات زیر تعیین کنید که آیا مجموعه توابع داده شده وابسته خطی هستند یا مستقل خطی. اگر وابسته خطی هستند، رابطه خطی میان آنها را بیابید.

الف) $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - t$

ب) $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - t$, $f_4(t) = t^2 + t + 1$

(3) در این مسئله چگونگی تعمیم قضیه آبل را به معادلات مرتبه بالاتر نشان می دهیم. نخست نکات عمده شیوه کار را برای معادله مرتبه سوم زیر بیان می کنیم

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$$

فرض کنیم y_1, y_2, y_3 جوابهای این معادله بر یک بازه I باشند.

الف) اگر $W = W(y_1, y_2, y_3)$ ، نشان دهید که

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

(راهنمایی: مشتق یک دترمینان 3 در 3 برابر است با مجموع سه دترمینان 3 در 3 که در آنها به ترتیب از

سطرهای اول، دوم و سوم مشتق گیری شده است.)

ب) مقادیر y_1''' ، y_2''' و y_3''' را از معادله دیفرانسیل پیدا میکنیم و در W' می گذاریم: سطر اول را در p_3 ، سطر

دوم را در p_2 ضرب و آنها را با سطر آخر جمع کنید تا به دست آید

$$W' = -p_1(t) W$$

ج) نشان دهید که

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = c \exp \left[- \int p_1(t) dt \right]$$

از اینجا نتیجه می شود که W بر I یا همواره صفر است و یا در هیچ جا صفر نیست.

د) این استدلال را برای معادله مرتبه n ام

$$y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \dots + p_n(t) y = 0$$

با جوابهای y_1 و \dots و y_n تعمیم دهید. یعنی، نشان دهید که

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = c \exp \left[- \int p_1(t) dt \right]$$

ه) با کمک فرمول آبل فوق، رونسکین یک مجموعه اساسی از جوابها را برای معادلات دیفرانسیل داده شده بیابید.

الف) $y''' + 2y'' - y' - 3y = 0$

ب) $y^{(4)} + y = 0$

ج) $t^2 y^{(4)} + t y''' + y'' - 4y = 0$

4) الف) نشان دهید که اگر y_1 یک جواب

$$y''' + p_1(t) y'' + p_2(t) y' + p_3(t) y = 0$$

باشد، آنگاه از قرار دادن $y = y_1(t)v(t)$ معادله مرتبه دوم زیر برای v' حاصل می شود:

$$y_1 v''' + (3 y_1' + p_1 y_1) v'' + (3 y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1) v' = 0$$

ب) با کمک روش کاهش مرتبه فوق معادله دیفرانسیل داده شده را حل کنید (میدانیم e^t یک جواب معادله مذکور

هست)

$$(2 - t) y''' + (2t - 3) y'' - t y' + y = 0, \quad t < 2$$

(5) در هر مورد عدد مختلط داده شده را به صورت $Re^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ بیان کنید.

$$1+i, \quad -3, \quad \sqrt{3} - i, \quad -i$$

(6) در صفحه مختلط $z = 1 + \sqrt{3}i$ را مشخص کرده و مختصات قطبی را بیابید و محل z^n را برای $n=1,2,3$ مشخص کنید. هر کدام را به شکل $a + bi$ و $Ae^{i\theta}$ بیان کنید. و در نهایت محل z^n را برای $n = 0, -1, -2, -3$ مشخص کنید.

(7) در هر مورد ریشه های داده شده عدد مختلط مورد نظر را تعیین کنید.

الف) $1^{1/3}$

ب) $[2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})]^{1/2}$

(8) در هر یک از معادلات زیر جواب عمومی را بیابید.

الف) $y''' - y'' - y' + y = 0$

ب) $y^{(6)} - y'' = 0$

ج) $y^{(4)} - 8y' = 0$

(9) جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید و رفتار جواب وقتی $t \rightarrow \infty$ چگونه خواهد بود؟

الف) $y''' - y'' + y' - y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$

ب) $2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$

10) دستگاه جرم فنر، نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید که متشکل از دو جسم با جرم های واحد است که به فنرهایی با ثابت واحد آویخته شده اند. فرض کنیم که هیچ میرایی در این دستگاه وجود ندارد.

با این فرض که u_1 و u_2 تغییر مکان های اجسام به ترتیب از وضع تعادل های مربوطشان بوده و در معادلات زیر صدق کنند:

$$u_1'' + 2u_1 - u_2 = 0 \quad , \quad u_2'' + u_2 - u_1 = 0$$

الف) با حذف u_1 به یک معادله دیفرانسیل مرتبه 4 بر حسب u_2 دست یابید.

ب) با حل معادله مذکور به یک جواب عمومی دست یابید.

