

به نام خدا

مخصوص کلاس حل تمرین

تمارین سری پنجم درس معادلات

(1) در هر یک از موارد زیر، ω_0 ، R و δ را به گونه ای بیابید که بتوان عبارت داده شده را به صورت $u = R \cos(\omega_0 t - \delta)$ نوشت.

(الف) $u = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$

(ب) $u = 4 \cos 3t - 2 \sin 3t$

(2) جرمی به وزن 2 پوند موجب می شود فنری 6 اینچ کشیده شود. اگر جرم را 3 اینچ دیگر به پایین بکشیم و سپس رها کنیم، و اگر مقاومت هوا وجود نداشته باشد، موقعیت جرم u را در هر لحظه از زمان t بیابید. نمودار u را بر حسب t رسم کنید. فرکانس، دوره تناوب، و دامنه حرکت را بیابید.

(3) یک جرم 16 پوندی موجب می شود طول فنری 3 اینچ افزایش یابد. اگر فنر را به یک میراگر با ثابت میرایی 2 پوند ثانیه برفوت، وصل کنیم، و جرم را از حال تعادلش با سرعت 3 in/sec رو به پایین به حرکت درآوریم، موقعیت جرم u را در هر لحظه از زمان t بیابید.

(4) نشان دهید که دوره تناوب برای حرکت ارتعاشی نامیرای جرمی که به فنری شاغولی آویخته شده برابر است با

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

که L افزایش طول فنر بر اثر جرم مزبور و g شتاب ناشی از ثقل است.

(5) نشان دهید که $A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ را می توان به صورت $r \sin(\omega_0 t - \theta)$ نوشت. r و θ را بر حسب

A و B تعیین کنید. اگر $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \sin(\omega_0 t - \theta)$ ، رابطه بین R ، r ، θ و δ را پیدا کنید.

6) در هر یک از موارد زیر، عبارت داده شده را به صورت حاصلضرب دو تابع مثلثاتی با بسامد های مختلف بنویسید.

الف) $\cos \pi t + \cos 2\pi t$

ب) $\sin 3t + \sin 4t$

7) جرمی به وزن 5 کیلوگرم موجب می شود فنری 10 سانتی متر کشیده شود. این جرم تحت تاثیر نیروی خارجی $10\sin(t/2)$ نیوتنی است و در سیالی حرکت میکند که وقتی تندی جرم 4cm/sec باشد نیروی گران روی 2 نیوتنی به آن وارد میکند.

الف) اگر جرم را از وضعیت تعادل اولیه اش با سرعت 3cm/sec به حرکت در آوریم، مسئله مقدار اولیه ای را که حرکت جرم را تشریح دهد بیان کنید.

ب) جواب مسئله مقدار اولیه فوق را بیابید.

ج) قسمت های گذرا و حالت پایای جواب را مشخص کنید.

د) اگر نیروی خارجی داده شده را با نیروی $2\cos \omega t$ با بسامد ω جایگزین کنیم، ω را طوری تعیین کنید که به ازای آن دامنه جواب واداشته ماکسیمم باشد.

8) یک دستگاه فنر- جرم دارای ضریب ثابت فنر 3 نیوتن بر متر است. جرمی به وزن 2 کیلوگرم به فنر آویزان شده و حرکت در سیالی گران رو رخ می دهد، که مقاومت آن به لحاظ عددی با قدر مطلق سرعت لحظه ای برابر است. اگر نیروی $3\cos 3t - 2\sin 3t$ نیوتنی بر دستگاه اثر بگذارد، جواب حالت پایا را بیابید. جواب خود را به صورت $R\cos(\omega t - \delta)$ بیان کنید.

9) دستگاه واداشته ولی نامیرایی را که با مساله مقدار اولیه زیر بیان شده بیابید.

$$u'' + u = 3\cos \omega t \quad , u(0)=0 \quad , u'(0)=0$$

جواب $u(t)$ را به ازای $\omega \neq 1$ بیابید.