به نام خدا

تمارین سری پنجم درس معادلات　　　　　　　　　　　　　　　　　　　مخصوص کلاس حل تمرین

1) معادله $y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$ را در نظر بگیرید که درآن p و q توابعی پیوسته اند.

الف) اگر توابع y_1 و y_2 مجموعه ای اساسی از جوابهای معادله را تشکیل بدهند، ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی y_1 یک و تنها یک ریشه از y_2 وجود دارد.

ب) آیا معادله دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه 2 وجود دارد که e^t و $t^2 - 1$ جوابهای آن باشند؟ اگر جواب مثبت است این مطلب چگونه با قسمت قبل در تناقض نمی باشد؟

ج) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه ای ازبازه I داشته باشند، آنگاه نمی توانند مجموعه ای اساسی از جوابها تشکیل دهند.

د) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه عطف مشترک در $t_0 \in I$ داشته باشند، آنگاه نمی توانند مجموعه ای اساسی از جوابها در آن بازه باشند مگر آنکه p و q هردو در t_0 صفر باشند.

2) از روش اویلر با طول گام 0.1 استفاده کنید تا برای مساله مقدار اولیه $y(0)=1$ و $y' = x + y^2$ یک مقدار تقریبی $y(x)$ زمانی که $x = 0.1\ ,\ 0.2\ ,\ 0.3$ باشد، بیابید. جواب شما برای $y(0.3)$ بسیار بالا است یا بسیار پایین؟

3) با تغییر متغیر مناسب ابتدا معادله زیر را (معادله اویلر) به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

$$t^2 y'' + 2t\, y' - 6\, y = 0$$

4) توابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ با دامنه $\mathbb{R}$ داده شده اند به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم $W(y_1,\ldots,y_n) \neq 0$. آیا معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب پیوسته از مرتبه n وجود دارد که توابع مذکور جوابهای مستقل خطی آن باشند ؟

5) معادله $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x)$ را نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید که اگر y_i یک جواب خاص به ازای $r(x) = r_i\,(x)$ باشد ($i = 1,2$) ، آنگاه y_1+y_2 یک جواب خاص برای $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ میباشد.

ب) از بخش الف استفاده کنید تا یک جواب خاص یرای معادله $y'' + 2y' + 2y = 2x + \cos x$ بیابید.

6) هر کدام از معادلات فاقد y زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

الف) $y'' = 1 + y'^2$

ب) $xy'' + y' = x$