

به نام خدا

مخصوص کلاس حل تمرین

تمارین سری چهارم درس معادلات

(1) در هر یک از موارد زیر بزرگترین بازه ای را بیابید که در آن مسئله مقدار اولیه حتما دارای یک جواب دویار مشتق پذیر و یکتا باشد.

الف) $ty'' + 3y = t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

ب) $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2$, $y(3) = 0$, $y'(3) = -1$

(2) معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = g(t)$ را در نظر بگیرید که در آن $a, b, c > 0$ هستند. اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ جواب معادله بالا باشند، رفتار تابع $y_1(t) - y_2(t)$ وقتی t به بی نهایت میل میکند چگونه می باشد؟

(3) معادلات دیفرانسیل زیر را از نظر کامل بودن بررسی کنید و جواب عمومی آنهایی که کاملند را بیابید.

الف) $3x^2y dx + (x^3 + y^3) dy = 0$

ب) $(x^2 - y^2) dx + (y^2 - x^2) dy = 0$

ج) $ve^{uv} du + ue^{uv} dv = 0$

(4) با یافتن عامل انتگرال ساز معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x dx + \frac{x^2}{y} dy = 0$

ب) $y dx - (x + y) dx = 0$, $y(1) = 1$

ج) $(t^2 + 4) dt + t dx = x dt$

(5) با توجه به عامل انتگرال ساز $\mu = \frac{5}{xy^2}$ ، مقدار A را یافته و جواب معادله داده شده را به دست آورید.

$(Axy - 2y^2) dx + (3xy - x^2) dy = 0$

(6) معادلات مرتبه دوم خودگردان زیر را حل کنید. (خودگردان بدین معنی که متغیر مستقل به صورت صریح در معادله ظاهر نمیشود.)

الف) $y y'' = y'^2$

ب) $y'' = a^2 y$

ج) $y'' = y' (1+3y^2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

(7) الف) اگر رونسکین $f(t) = e^{3t}$ و $g(t)$ برابر با $2e^{6t}$ باشد، آنگاه g را بیابید.

ب) اگر y_1 و y_2 مجموعه ای اساسی از جواب های معادله دیفرانسیل $ty'' + 2y' + te^t y$ را تشکیل بدهند و $W(y_1, y_2) = 3$ باشد آنگاه مقدار $W(y_1, y_2)$ (5) را بیابید.

(8) در معادلات زیر ابتدا جواب معادله همگن و سپس جواب معادله ناهمگن را با استفاده از روش ضرایب نامعین بدست آورید.

الف) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

ب) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \{ 2 \sin 2x + 2 \cos 2x \}$

(9) الف) ابتدا نشان دهید $y_1(x) = x^2$ و $y_2(x) = x^2 \ln x$ جوابهای همگن معادله $x^2 y'' - 3x y' + 4y = x^2 \ln x$ برای $x > 0$ میباشد و سپس یک جواب خاص این معادله را با روش تغییر پارامتر بیابید.

ب) برای هر یک از معادلات زیر جواب خصوصی را با روش تغییر پارامتر بیابید.

الف) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

ب) $y'' + y = \cotg x$

(10) معادله دیفرانسیل $(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$ را در نظر بگیرید. چنانچه این معادله دیفرانسیل

دارای پایه جوابی به صورت $y(x) = e^{px}$ باشد، p را پیدا کنید و سپس پایه دوم جواب را مشخص کنید.